

ÜBER ABSTRAKTE PRIMZAHLSÄTZE MIT RESTGLIED

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der
Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Helmut Müller
aus Berlin

1970

1971

ÜBER ABSTRAKTE PRIMZAHLSÄTZE MIT RESTGLIED

Inaugural-Dissertation
zur

Erlangung der Doktorwürde
des

Fachbereichs Mathematik
der

Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Helmut Müller
aus Berlin

1970

1. Referent : Professor Dr. H. Orsinger

2. Referent : Professor Dr. A. Dinghas



Tag der mündlichen Prüfung : 29 Januar 1971

Tag der Promotion :

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
Einleitung	1
1. Grundlegendes	6
2. Über L -Funktionen	10
3. 1. Beweis des Primzahlsatzes mit Restglied mit analytischer Methode	19
4. 2. Beweis des Primzahlsatzes mit Restglied	26
4.1 Analytische Methode im Falle $K''' \neq \emptyset$	26
4.2 Elementare Methode im Falle $K''' = \emptyset$	41
4.2.1 $\chi \in K'$	45
4.2.2 $\chi \in K''$	50
4.2.3 Iteration	54
5. Übergang von $\psi(x, H)$ auf $\pi(x, H)$	67
6. Beispiele	74
Literaturverzeichnis	82



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Die abstrakte Primzahltheorie beginnt 1937 mit den Untersuchungen von BEURLING [5]. Er legte sich folgende Frage vor :

Wählt man in den reellen Zahlen > 1 statt der Primzahlen beliebige Zahlen p_n mit $p_n \longrightarrow \infty$ aus und betrachtet die von diesen Zahlen erzeugte freie Halbgruppe G reeller Zahlen, wie muß dann $\varepsilon(x)$ beschaffen sein, damit aus

$$N(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in G}} 1 = Ax + \varepsilon(x) \text{ mit } \varepsilon(x) = o(x), A > 0$$

der 'Primzahlsatz'

$$\pi(x) = \sum_{p_n \leq x} 1 \sim \frac{x}{\log x}$$

folgt ?

Im Falle der gewöhnlichen Primzahlen hat man $\varepsilon(x) = O(1)$. Das hierbei von BEURLING erzielte Ergebnis ist bestmöglich. Er zeigt :

Jedes $\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon(x) = O(x \log^{-\gamma} x)$ und $\gamma > \frac{3}{2}$ hat die gewünschte Eigenschaft, dagegen reicht $\gamma = \frac{3}{2}$ nicht. Dieses Ergebnis wurde in letzter Zeit von DIAMOND [10] dahingehend verschärft, daß auch jedes $\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon(x) = O(x \log^{-3/2} x \exp(-(\log \log x)^\alpha))$ und $\alpha > \frac{1}{3}$ den Primzahlsatz nach sich zieht.

Dieser Problemkreis wurde dann von NYMAN [33] und MALLIAVIN [31] aufgegriffen. Sie behandeln dabei die naheliegende Frage, welche Restglieder im Primzahlsatz sich über die Asymptotik hinaus erzielen lassen, natürlich in Abhängigkeit von der vorgegebenen Funktion ε . Eine ausführliche Darstellung und Diskussion des BEUR-

LINGschen Fragenkreises findet man bei DIAMOND und BATEMAN [11]. Weiterhin gibt es eine umfangreiche elementare Theorie mit vielen speziellen Einzelfragen, die bis an die Herleitung eines der SELBERG'schen Formel entsprechenden Resultats reichen, bei HORADAM [17] - [26]. Ebenso KALNIN [28], der mehr oder weniger grobe Abschätzungen herleitet, aber nicht den Primzahlsatz. Mit ganz ähnlichen Fragen beschäftigen sich noch weitere Arbeiten, die aber von einer etwas allgemeineren Grundlage ausgehen: Statt Unterhalbgruppen der multiplikativen Halbgruppe der reellen Zahlen > 1 betrachtet man nun beliebige freie abelsche Halbgruppen G , die 'regulär normiert' sind. Dabei heißt eine Halbgruppe regulär normiert, wenn ein Homomorphismus $N: G \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, der noch bestimmte arithmetische Eigenschaften hat, die es z.B. erlauben, die Bilder Ng und damit die Elemente $g \in G$ abzuzählen. Es zeigt sich, daß viele Verfahren aus der Zahlentheorie, sowohl elementare, als auch analytische, übertragen werden können.

Bezüglich der Analoga zum Primzahlsatz, die uns in dieser Arbeit besonders interessieren, ist hier zunächst BREDIHIN [7] zu nennen, der aus

$$N(x) = C x^{\theta} + O(x^{\theta_1}) \quad , \quad 0 \leq \theta_1 < \theta, C > 0 \quad ,$$

mit Hilfe der elementaren Methode von SELBERG

$$\pi(x) \sim \frac{x^{\theta}}{\theta \log x}$$

herleitet.

Daran schließt sich die Arbeit von WEGMANN [35] an, der mit elementaren Mitteln (nach WIRSING [36]) bei einem sehr schwachen Restglied in $N(x)$, nämlich $O(x \log^{-\gamma} x)$ mit $\gamma > 3$, für $\pi(x)$ erhält:

$$\pi(x) = \text{li } x^\theta + O(x^\theta \log^{-\delta} x) \quad \text{für alle } \delta < \frac{\gamma}{2}.$$

Es lassen sich aber auch, wie oben erwähnt, analytische Methoden verwenden. Dazu betrachtet man Funktionen ζ_G , die analog zur RIEMANNschen ζ -Funktion gebildet sind und ebenfalls funktionentheoretische Eigenschaften besitzen, die in engem Zusammenhang mit der Verteilung der Primelemente stehen. So zeigt BREDIHIN in [7] elementar, daß $\zeta_G(s) \neq 0$ ist für $s = \theta + it$, $t \neq 0$. JUŠKIS [27] behandelt auf analytischem Weg das Verhalten von Primteileranzahlen für solche freien Halbgruppen und beweist dabei das Nichtverschwinden von ζ_G für ganz ähnliche Bereiche, wie man sie im klassischen Fall für die RIEMANNsche ζ -Funktion kennt. Schließlich gelang es BREDIHIN [9] mit Hilfe komplexer Integration, den Primzahlsatz in der Form

$$\pi(x) = \text{li } x^\theta + O(x^\theta \exp(-c\sqrt{\log x})), \quad c > 0$$

zu beweisen.

Alle bisher zitierten Sätze beinhalten den gewöhnlichen Primzahlsatz für $\mathbb{N}$. Es fällt auf, daß bis jetzt Analogä zum Primzahlsatz für die arithmetische Progression nicht enthalten sind.

Dieser Frage wandten sich erstmals FORMAN und SHAPIRO [16] zu. Mit SHAPIRO's elementarer Methode ließen sich solche Analogä beweisen. Diese rein asymptotischen Resultate wurden später von AMITSUR [1] dahingehend verschärft, daß er in den Ausgangsgleichungen schwächere Restglieder fordert. Ein in der ursprünglichen Arbeit (von AHERN [3] entdeckter) enthaltener Fehler wurde kürzlich von AMITSUR [2] selbst korrigiert. Weitere Ergebnisse, die sich auf Nebenklassen beziehen, findet man bei FOGELS [15] (Analogä zum Satz von LINNIK) und bei FAÏNLEÏB [14] (Summierung multiplika-

tiven Funktionen).

Es ist nun bemerkenswert, daß es in der Literatur keine Arbeit gibt, die sich mit Restgliedern im Primzahlsatz im Falle von Nebenklassen beschäftigt. Während dies im einklassigen Fall mit elementaren und analytischen Methoden ausführlich geschehen ist, kennt man im mehrklassigen Fall keine über die bloße Asymptotik hinausgehende Aussage.

Dieses Problem wird im ersten Abschnitt der hier vorliegenden Arbeit behandelt. Die dabei zu Grunde liegende Ausgangssituation ist die gleiche wie bei FORMAN und SHAPIRO.

Es gilt Satz 4 :

Es gibt ein $c > 0$, so daß

$$\pi(x, H) = \sum_{\substack{Np \leq x \\ p \in H}} 1 = D(H) \operatorname{li} x + O(x \exp(-c \sqrt{\log x})).$$

(Zur Bezeichnung : siehe S.68)

Der hierbei ausgeführte Beweis ist eng an die klassische komplexe Integrationsmethode angelehnt.

Strukturell sind ja die Faktorgruppe und die zugehörige Gruppe der Charaktere eng verknüpft (Abschnitt 1.).

In einem weiteren Abschnitt (4.1) wird gezeigt, wie das Vorhandensein bestimmter Charaktere (wie sie im klassischen Fall nicht auftreten) weitgehende Aussagen über die Lage der Nullstellen der zugehörigen L-Reihen erlaubt und wie sich dieses Verhalten speziell auf das Restglied im Primzahlsatz auswirkt. Unter Annahme der RIEMANNschen Vermutung konnten FORMAN und SHAPIRO Beispiele für Gruppen geben, bei denen solche Charaktere auftreten. Hier wird nun umgekehrt gezeigt, daß die Existenz dieser Charaktere insbesondere einen nullstellenfreien vertikalen Streifen $\operatorname{Re} s > \beta$ mit einem $\beta < 1$ für die zugehörige ζ -

Funktion garantiert.

Wie weit reichen nun elementare Methoden ? Die wirksamsten Verfahren, Restglieder für den Primzahlsatz zu erhalten, stammen von WIRSING [36] und BOMBIERI [6]. Wie WIRSING in [36] skizziert hat, läßt sich seine Methode auch auf den Fall mit Restklassen übertragen, wenn $L(1, \chi) \neq 0$ für jeden Nichthauptcharakter gilt. Diese im klassischen Fall elementar beweisbare Tatsache braucht in der hier betrachteten Situation nicht zuzutreffen. Trifft sie aber zu, d.h. ist $L(1, \chi) \neq 0$, wenn $L(s, \chi)$ in $s = 1$ holomorph ist, so läßt sich das WIRSINGsche Verfahren leicht modifiziert übertragen (Abschnitt 4.2). Man erhält damit als Resultat das gleiche Restglied wie im klassischen Fall, welches schwächer ist als das mit analytischen Mitteln in Abschnitt 3. erreichte.

In dem abschließenden Abschnitt 6. wird gezeigt, wie sich der Primzahlsatz für die arithmetische Progression und der Primidealsatz für Idealklassen in die hier betrachteten allgemeineren Situation einordnen lassen.

Herrn Professor Orsinger danke ich herzlich für seine Unterstützung dieser Arbeit.

1. Grundlegendes

$(G, \cdot)$ sei eine freie abelsche Gruppe mit abzählbar vielen Basiselementen (Primelementen) $p_1, p_2, \dots$. Weiter existiere ein Homomorphismus $N : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$, wobei $\mathbb{R}^+ = \{r \mid r \in \mathbb{R}, r > 0\}$. UCG sei eine Untergruppe von G mit endlicher Faktorgruppe: $[G/U] = h$. Mit $g, g \in G$ werde stets ein 'ganzes' Element von G bezeichnet, d.h. in der Darstellung $g = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ gilt $n_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, k$. Dann bilden die ganzen Elemente von G eine abelsche Halbgruppe mit 1-Element, wenn, wie üblich, $p_i^0 = e$ gesetzt wird für $i = 1, 2, \dots$ (e ist das neutrale Element von G). Für jedes $H \in G/U$ gelte:

$$B_H(x) := \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} 1 = c_H x + o(x^\alpha) \quad \text{für } x \longrightarrow \infty$$

1) mit

$$1) \quad c_H \geq 0, \quad c = \sum_H c_H > 0$$

und

$$2) \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

In manchen Arbeiten (BREDIHIN, JUŠKIS) geht man von einer zu (1) sehr ähnlichen Relation aus, nämlich: $B_H(x) = c_H x^{\theta} + o(x^{\theta_1})$ mit $0 \leq \theta_1 < \theta$. Diese ist nur unwesentlich allgemeiner als (1), denn ersetzt man den Homomorphismus N durch $N' = N^{\theta}$, so ist

$$\begin{aligned} B_H^1(x) &= \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} 1 = \sum_{\substack{N^{\theta} g \leq x \\ g \in H}} 1 = \sum_{\substack{Ng \leq x^{1/\theta} \\ g \in H}} 1 = \\ &= B_H(x^{1/\theta}) \\ &= c_H x + o(x^{\frac{\theta_1}{\theta}}) \quad \text{mit } 0 \leq \frac{\theta_1}{\theta} < 1, \\ &\quad \text{also (1).} \end{aligned}$$

Aus (1) folgt unmittelbar, daß $Np_i > 1$ für jedes p_i gilt und daß Np_i mit i beliebig groß wird. Damit ist die Halbgruppe der ganzen Elemente von G zusammen mit dem Homomorphismus N eine F -Halbgruppe, wie sie z.B. von WEGMANN [35] untersucht worden ist.

Da die Zahlen Np_i sich im Endlichen nicht häufen können, ist es oft zweckmäßig, $Np_i \in \mathbb{N}$ zu fordern. Wir wollen dies hier ebenfalls tun, da dies für die anschließenden Untersuchungen nur eine unwesentliche Einschränkung darstellt. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß bei dem Übergang von N zu N^θ diese Eigenschaft verloren gehen kann.

Wir betrachten ferner die (endliche, abelsche) Charaktergruppe K der (endlichen, abelschen) Faktorgruppe G/U und erweitern in natürlicher Weise diese Charaktere zu Charakteren von G ; d.h. wir setzen

$$\chi(g) = \chi(H) \quad , \quad \text{wenn } g \in H \quad .$$

Den Hauptcharakter, das neutrale Element von K , bezeichnen wir mit χ_1 .

Durch partielle Summation erhält man aus (1):

$$(2) \quad \sum_{Ng \leq x} \frac{\chi(g) \log^j Ng}{Ng} = \frac{A(\chi)}{j+1} \log^{j+1} x + L_j(\chi) + O(x^{\alpha-1} \log^j x)$$

$$\text{für } j = 0, 1, 2, \dots$$

Für $A(\chi)$ gilt noch

$$(3) \quad A(\chi) = \sum_H c_H \chi(H) \quad .$$

Man vergleiche hierzu FORMAN and SHAPIRO [16].

Mit Hilfe der soeben definierten Größen A , L_j wird die Charaktergruppe K in folgende disjunkte Klassen unterteilt:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & 1) \quad K' = \left\{ \chi \mid \chi \in K, A(\chi) \neq 0 \right\} , \\
 & 2) \quad K'' = \left\{ \chi \mid \chi \in K, A(\chi) = 0, L_0(\chi) \neq 0 \right\} , \\
 & 3) \quad K''' = \left\{ \chi \mid \chi \in K, A(\chi) = 0, L_0(\chi) = 0 \right\} .
 \end{aligned}$$

Bezüglich dieser Klasseneinteilung gilt nun :
 (Beweise : siehe FORMAN and SHAPIRO .)

- (5) K' ist Untergruppe von K .
- (6) K''' ist leer oder $K' \cup K'''$ ist Untergruppe von K , die K' als Untergruppe vom Index 2 enthält.
- (7) Wenn $\alpha < \frac{1}{2}$, so ist K''' leer.
- (8) Wenn $\chi \in K'''$, so ist $L_1(\chi) \neq 0$.

Aus (1) und (3) erhält man weiter

$$(9) \quad B(x, \chi) := \sum_{Ng \leq x} \chi(g) = A(\chi) x + O(x^\alpha) .$$

Die Gruppen G und $Q^+ = \{r \mid r \in Q, r > 0\}$ sind offensichtlich isomorph. Deshalb lassen sich alle Begriffe aus der Zahlentheorie, soweit sie sich nur auf multiplikative Eigenschaften beziehen, übertragen. So wird man als MÖBIUSsche μ -Funktion folgende Funktion definieren :

$$(10) \quad \mu_G(g) = \begin{cases} 1 & \text{für } g = e , \\ (-1)^k & \text{für } g = p_1 \dots p_k , p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j , \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

und als verallgemeinerte v. MANGOLDTsche Funktion

$$(11) \quad \Lambda_G(g) = \begin{cases} \log Np & , \text{ falls } g = p^k, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt dann, wie im klassischen Fall, :

$$(12) \quad \sum_{d|g} \mu_G(d) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } g = e, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im folgenden wird gelegentlich von der Formel der partiellen Integration auch für RIEMANN-STIELTJES-Integrale in der speziellen Form :

$$(13) \quad \begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b f(t)dg(t) + \int_a^b g(t)df(t) \\ &= \int_a^b f(t)dg(t) + \int_a^b g(t)f'(t)dt \end{aligned}$$

Gebrauch gemacht, wobei f für alle $t > 0$ differenzierbar und g eine Treppenfunktion ist, d.h. g ändert seinen Wert höchstens für ganzzahliges Argument. Die Grenzen a und b sind stets positiv. Unter diesen Voraussetzungen existieren die angegebenen Integrale und es gilt (13). (Beweis : siehe z.B. I. P. NATANSON [32], S. 231 ff.) Das schon gebrauchte und auch später manchmal auftretende Adjektiv 'klassisch' bezieht sich stets auf die Zahlentheorie in $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$.

2. L - Funktionen

Für $\chi \in K$, $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$ setzt man

$$(14) \quad L(s, \chi) := \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-s} \quad .$$

Ehe wir die Existenz des rechtsstehenden Limes nachweisen, sei auf folgende abkürzende Schreibweise hingewiesen :

$$\sum_g a(g) := \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{Ng \leq x} a(g) \quad ,$$

so daß wir für (14) auch schreiben können

$$(15) \quad L(s, \chi) = \sum_g \chi(g) Ng^{-s} \quad \text{für } \sigma > 1$$

und speziell

$$\zeta_G(s) = L(s, \chi_1) = \sum_g Ng^{-s} \quad .$$

Wir werden anschließend in Hilfssatz 1 zeigen, daß $L(s, \chi)$ nicht nur eine für $\sigma > 1$ holomorphe Funktion ist, sondern daß sie sich mit eventueller Ausnahme eines einfachen Poles bei $s=1$ bis $\sigma > \alpha$ analytisch fortsetzen läßt. Hier geht entscheidend die Gestalt der Restglieder aus (1) ($O(x^\alpha)$ mit $0 \leq \alpha < 1$) ein, da wegen $\alpha < 1$ die eventuelle Singularitätsstelle $s=1$ völlig umschlossen wird, so daß sich mit Hilfe von Randintegralen Residuen bei $s=1$ geeigneter Funktionen berechnen bzw. abschätzen lassen.

Wird dagegen in den Restgliedern von (1) lediglich $O(x \log^{-\gamma} x)$ für bestimmte $\gamma > 0$ vorausgesetzt (WEGMANN [35], BEURLING [5], AMITSUR [1], [2]), so ist die Existenz der L-Funktionen für $\sigma < 1$ nicht unmittelbar nachzuweisen und in manchen Fällen (für kleine γ) selbst für $\sigma = 1$ nicht einmal gesichert.

Um in dieser Situation Aussagen über die Verteilung der verallgemeinerten Primzahlen zu gewinnen, wird man Taubersätze, die im wesentlichen ja nur in $\sigma \geq 1$ operieren, zu übertragen versuchen.

Nun, wie schon angekündigt,

Hilfssatz 1 :

Für jedes $\chi \in K$ ist

$$(16) \quad L(s, \chi) - \frac{A(\chi)}{s-1} \quad \text{für } \sigma > \alpha \text{ holomorph}$$

und es gilt

$$(17) \quad L(s, \chi) - \frac{A(\chi)}{s-1} = O\left(\frac{|s|}{\sigma-\alpha}\right) \quad \text{für } \alpha < \sigma < 4, \\ s \neq 1, |t| \rightarrow \infty.$$

Beweis :

Mit (13) erhält man für $\sigma > 1, x > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-s} &= \int_{1-}^x y^{-s} dB(y, \chi) \\ &= \int_{1-}^x y^{-s} d(B(y, \chi) - A(\chi)y) + A(\chi) \int_{1-}^x y^{-s} dy \\ &= y^{-s} (B(y, \chi) - A(\chi)y) \Big|_{1-}^x + s \int_{1-}^x (B(y, \chi) - A(\chi)y) y^{-s-1} dy + \\ &\quad + \frac{A(\chi)}{s-1} + A(\chi) \frac{x^{1-s}}{1-s} \end{aligned}$$

$$= \frac{A(X)}{s-1} + A(X) + s \int_1^x (B(y, X) - A(X)y) y^{-s-1} dy + A(X) \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{\alpha-1}).$$

Läßt man nun $x \rightarrow \infty$ streben, so folgt

$$L(s, X) = \frac{A(X)}{s-1} + A(X) + s f(s) \quad \text{für } \sigma > 1.$$

Da $f(s) = \int_1^\infty (B(y, X) - A(X)y) y^{-s-1} dy$ nach (9)

in $\sigma > \alpha$ holomorph ist (das Integral konvergiert für $\sigma > \alpha \geq \alpha + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig), ist (16) bereits gezeigt.

(17) folgt unmittelbar aus

$$|f(s)| \leq C \int_1^\infty y^{\alpha-\sigma-1} dy \quad .-$$

Insbesondere sieht man mit Hilfe von Hilfssatz 1 leicht, wie die Einteilung von K in K' , K'' , K''' dem Verhalten der zugehörigen L -Funktionen an der Stelle $s = 1$ äquivalent ist :

- (18) $X \in K'$ gilt genau dann, wenn $L(s, X)$ in $s = 1$ einen einfachen Pol hat, mit dem Residuum $A(X)$;
- (19) $X \in K''$ gilt genau dann, wenn $L(s, X)$ in $s = 1$ holomorph und $\neq 0$ ist ;
- (20) $X \in K'''$ gilt genau dann, wenn $L(s, X)$ in $s = 1$ holomorph und $= 0$ ist. (Nach (8) ist diese Nullstelle einfach.)

Hierbei beachte man, daß

$$L(1, X) = L_0(X)$$

$$L(1, \chi) = -L_1(\chi)$$

für $\chi \in K'' \cup K'''$ gilt.

Bemerkung :

Es ist ein berühmtes und wichtiges Ergebnis der klassischen Zahlentheorie, daß $L(1, \chi_k) \neq 0$ gilt für alle Nichthauptcharaktere χ_k der primen Restklassengruppe mod k . Wie später (s.S. 74) gezeigt wird, stimmen die hier in (14) definierten L -Funktionen bei passender Wahl von G und U mit den klassischen L -Funktionen überein. Aus (20) folgt dann, daß in diesem speziellen Falle die erste Möglichkeit von (6) zutrifft, nämlich $K''' = \emptyset$ gilt.

Wie im klassischen Fall beweist man für $\sigma > 1$ eine der EULERSchen Formel entsprechende Identität :

$$(21) \quad L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p) Np^{-s})^{-1} : = \lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{Np \leq x} (1 - \chi(p) Np^{-s})^{-1}.$$

Insbesondere hat man damit wegen der Konvergenz des Produktes :

$$(22) \quad L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{für } \sigma > 1 \text{ und jedes } \chi \in K.$$

Mit (12) gilt dann auch

$$(23) \quad L(s, \chi)^{-1} = \sum_g \mu_G(g) \chi(g) N\bar{g}^{-s} \quad \text{für } \sigma > 1 \\ \text{und jedes } \chi \in K.$$

Hieraus folgt weiter, daß man dort (21) logarithmieren kann :

$$\log L(s, \chi) = \sum_p \left\{ \chi(p) Np^{-s} + \frac{1}{2} \chi(p^2) Np^{-2s} + \dots \right\}$$

$$(24) \quad = \sum_g \chi(g) N g^{-s} \frac{\Lambda_G(g)}{\log N g} \quad \text{für } \sigma > 1,$$

wobei Λ_G die in (11) definierte v. MANGOLDTsche Funktion ist; hierbei ist

$$\frac{\Lambda_G(e)}{\log e} = 0$$

zu setzen.

Durch (24) wird derjenige Wert von $\log L(s, \chi)$ dargestellt, der gegen Null strebt, wenn s durch positive reelle Werte gegen Unendlich geht. Da für $\sigma > 1$ $L(s, \chi) \neq 0$ und holomorph ist, ist dieser Zweig des Logarithmus dort eindeutig und holomorph. Differenzieren wir (24), so ergibt sich, wie im klassischen Fall :

$$(25) \quad \frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = - \sum_g \chi(g) \Lambda_G(g) N g^{-s}$$

mit $\sigma > 1$.

Entwickelt man $\frac{L'}{L}(s, \chi)$ an der Stelle $s = 1$ in eine Potenzreihe, was für eine geeignete Umgebung wegen Hilfssatz 1 sicher geht, so ergibt sich mit (18), (19) und (20) :

Es gibt ein γ mit $0 < \gamma \leq 1 - \alpha$, so daß für jedes $\chi \in K$ gilt :

$$(26) \quad \frac{L'}{L}(s, \chi) = - \frac{B(\chi)}{s-1} + B_1(\chi)(s-1) + B_2(\chi)(s-1)^2 + \dots,$$

wobei $|s-1| < \gamma$ und

$$B(\chi) = \begin{cases} 1 & \chi \in K' \\ 0 & \text{falls } \chi \in K'' \\ -1 & \chi \in K''' \end{cases}$$

Der nächste Hilfssatz enthält eine genauere Auskunft als (17) über das Anwachsen von L-Reihen für $|t| \longrightarrow \infty$.

Hilfssatz 2 :

Es gilt für jedes $\chi \in K$:

$$(27) \quad L(s, \chi) = O(|t|^{\frac{\delta}{1-\alpha}}) \quad \text{für jedes } \delta \text{ mit} \\ 0 < \delta < \frac{1-\alpha}{2}, \quad 1-\delta \leq \sigma \leq 2 \\ \text{und} \quad |t| \geq 2.$$

Beweis :

Für $\sigma > 1$, $x > 1$, $x \in \mathbb{N}$ gilt :

$$L(s, \chi) = \sum_g \chi(g) N g^{-s} = \sum_{N g \leq x} \chi(g) N g^{-s} + \int_x^\infty y^{-s} dB(y, \chi),$$

wobei

$$B(y, \chi) = \sum_{N g \leq y} \chi(g) = A(\chi) y + R(y, \chi)$$

mit

$$R(y, \chi) = O(y^\alpha) \quad \text{nach (9) .}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_x^\infty y^{-s} dB(y, \chi) &= y^{-s} B(y, \chi) \Big|_x^\infty + s \int_x^\infty B(y, \chi) y^{-s-1} dy \\ &= A(\chi) \frac{x^{1-s}}{s-1} - R(x, \chi) x^{-s} + s \int_x^\infty R(y, \chi) y^{-s-1} dy \end{aligned}$$

und damit

$$L(s, \chi) = \sum_{N g \leq x} \chi(g) N g^{-s} + A(\chi) \frac{x^{1-s}}{s-1} - R(x, \chi) x^{-s} + s \int_x^\infty R(y, \chi) y^{-s-1} dy.$$

Hier schätzen wir nun für $x \longrightarrow \infty$ ab :

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= O\left(\sum_{Ng \leq x} Ng^{-\sigma}\right) + O(x^{1-\sigma}) + O\left(|t| \frac{x^{\alpha-\sigma}}{\sigma-\alpha}\right) \\ &= O\left(\sum_{Ng \leq x} Ng^{\delta-1}\right) + O(x^{\delta}) + O\left(|t| \frac{x^{\alpha+\delta-1}}{1-\delta-\alpha}\right) \\ &= O(x^{\delta}) + O\left(|t| \frac{x^{\alpha+\delta-1}}{1-\delta-\alpha}\right) \\ &= O\left(|t| \frac{\delta}{1-\alpha}\right) \quad \text{mit} \quad x = |t|^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad .- \end{aligned}$$

Bemerkung :

Wegen $\frac{\delta}{1-\alpha} \leq \frac{1}{2}$ ist (27) für $\chi = \chi_1$ etwas schärfer als Lemma 3 bei JUŠKIS [27] .

Es folgen nun zwei Hilfssätze, die Aussagen über die Verteilung von (eventuellen) Nullstellen für $\sigma \leq 1$ enthalten.

Zunächst

Hilfssatz 3 :

Es ist für jedes $\chi \in K$

$$L(s, \chi) \neq 0$$

für $s = 1 + it$, $t \neq 0$.

Beweis :

Für $\sigma > 1$ betrachte man

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left\{ 3 \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1) + 4 \frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi) + \frac{L'}{L}(\sigma + 2it, \chi^2) \right\} \\ &= - \sum_g Ng^{-\sigma} \chi_g(g) \operatorname{Re} \left\{ 3 + 4 \chi(g) Ng^{-it} + \chi^2(g) Ng^{-2it} \right\} \end{aligned}$$

$$(28) \quad \leq 0 \quad \text{nach der Cosinusungleichung;} \\ \quad \quad \quad (\text{siehe z.B. ESTERMANN [13] .})$$

Nun ist nach (26)

$$\frac{L'}{L}(\sigma, \chi) = -\frac{1}{\sigma-1} + O(1) \quad \text{für} \quad \sigma \rightarrow 1.$$

Wäre $1+it$ eine m -fache Nullstelle von $L(s, \chi)$, so hätte man

$$\frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi) = \frac{m}{\sigma-1} + O(1) \quad \text{für} \quad \sigma \rightarrow 1, m \geq 0.$$

Nun ist $1+2it$ wegen $t \neq 0$ eine reguläre Stelle von $L(s, \chi^2)$, etwa eine a -fache Nullstelle, $a \geq 0$. Dies ergibt

$$\frac{L'}{L}(\sigma + 2it, \chi^2) = \frac{a}{\sigma-1} + O(1) \quad \text{für} \quad \sigma \rightarrow 1.$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ 3 \frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1) + 4 \frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi) + \frac{L'}{L}(\sigma + 2it, \chi^2) \right\} \\ &= \frac{1}{\sigma-1} \left\{ -3 + 4m + a \right\} + O(1) \end{aligned}$$

und weiter mit $\sigma \rightarrow 1+$ und (28)

$$-3 + 4m + a \leq 0 \quad \text{oder auch} \quad m = 0 \quad .-$$

Bemerkung :

Der Wert von $L(s, \chi)$ für $t = 0$ oder $s = 1$ ist aus (19) und (20) leicht zu ersehen. Für $\chi = \chi_1$ ist das Ergebnis von Hilfssatz 3 in einer Arbeit von BREDIHIN [7] enthalten.

Hilfssatz 4 :

Es gibt ein $C > 0$, so daß für alle $\chi \in K$
gilt :

$$L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{in} \quad \sigma \geq 1 - \frac{C}{\log |t|} , \quad |t| \geq 3 .$$

Beweis :

Auch hier lassen sich die klassischen funktionentheoretischen Beweismethoden ohne größere Änderungen übertragen, so z.B. der Beweis von Satz 5.6 , PRACHAR [34] , S. 117 . Die dort herangezogenen Eigenschaften der L-Funktionen können hier unter Verwendung von Hilfssatz 2 leicht nachgewiesen werden, so daß wir auf eine ausführliche Beweisdarstellung verzichten.

Bemerkung :

Das Ergebnis von Hilfssatz 4 ist für $\chi = \chi_1$ in Lemma 7 der Arbeit von JUŠKIS [27] hergeleitet. Man vergleiche hierzu auch 7. Lemma 4 bei FOGELS [15].

Mit Hilfe von Hilfssatz 4 kann man nun ganz analog zum klassischen Fall (z.B. Theorems 13, 14, 51 bei ESTERMANN [13]) Aussagen über das Wachstum von $\frac{L'}{L}(s, \chi)$ für $|t| \rightarrow \infty$ links von $\sigma = 1$ gewinnen :

Hilfssatz 5 :

Für jedes $\chi \in K$ und $1 - \frac{C}{\log T} \leq \sigma \leq 2$, $T \geq |t| \geq 3$
ist $\frac{L'}{L}(s, \chi)$ holomorph und es gilt dort :

$$(29) \quad \frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\log^3 T) \quad \text{für} \quad T \rightarrow \infty .$$

3. 1. Beweis des Primzahlsatzes mit Restglied mit analytischer Methode

Die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Ergebnisse über L-Funktionen bilden nun die Voraussetzungen für einen analytischen Beweis des Primzahlsatzes mit Restglied nach der klassischen komplexen Integrationsmethode.

Es gilt zunächst :

Hilfssatz 6 :

Es gibt ein $c_1 > 0$, so daß für jedes $X \in K$ gilt

$$(30) \quad \sum_{Ng \leq x} X(g) \Lambda_G(g) (x - Ng) = \frac{B(X)}{2} x^2 + O(x^2 \exp(-c_1 \sqrt{\log x})),$$

wobei $B(X)$ wie in (26) definiert ist.

Beweis :

Wir gehen aus von der Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^s (s(s+1))^{-1} ds = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < y \leq 1, \\ 1 - y^{-1} & \text{für } y \geq 1, \end{cases}$$

mit $a > 0$.

(Beweis : siehe etwa AYOUB [4] , S. 54) .

Ist $x > 0$, so gilt danach

$$\sum_{Ng \leq x} X(g) \Lambda_G(g) \left(1 - \frac{Ng}{x}\right) = \sum_g X(g) \Lambda_G(g) \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{x}{Ng}\right)^s (s(s+1))^{-1} ds.$$

Wir wollen nun zeigen, daß man hier für $a > 1$ die

Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen kann. Dies führt dann auf

$$(31) \quad \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) \left(1 - \frac{Ng}{x}\right) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s (s(s+1))^{-1} \frac{L'(s, \chi)}{L} ds$$

Um die Vertauschung zu rechtfertigen, zeigen wir

$$1) \quad \int_{a+iT}^{a+i\infty} \left(\frac{x}{Ng}\right)^s \chi(g) \Lambda_G(g) (s(s+1))^{-1} ds = o(1) \quad \text{für } T \longrightarrow \infty$$

gleichmäßig in g

und

$$2) \quad \sum_g \left(\frac{x}{Ng}\right)^s \chi(g) \Lambda_G(g) (s(s+1))^{-1} \quad \text{konvergiert gleichmäßig in } t.$$

Nun ist

$$\left| \int_{a+iT}^{a+i\infty} x^s \chi(g) \Lambda_G(g) Ng^{-s} (s(s+1))^{-1} ds \right|$$

$$\leq C \log Ng \left(\frac{x}{Ng}\right)^a \int_T^\infty t^{-2} dt \leq C' T^{-1} \frac{\log Ng}{Ng^a} < \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$, wenn $T > T_0(\varepsilon)$, da $a > 0$ ist.

Damit ist 1) bereits gezeigt.

2) folgt aus

$$\left| \sum_g \left(\frac{x}{Ng}\right)^s \chi(g) \Lambda_G(g) (s(s+1))^{-1} \right| \leq C \frac{x^a}{|s|^2} \sum_g \Lambda_G(g) Ng^{-a}$$

$$\leq C' \sum_g \Lambda_G(g) Ng^{-a},$$

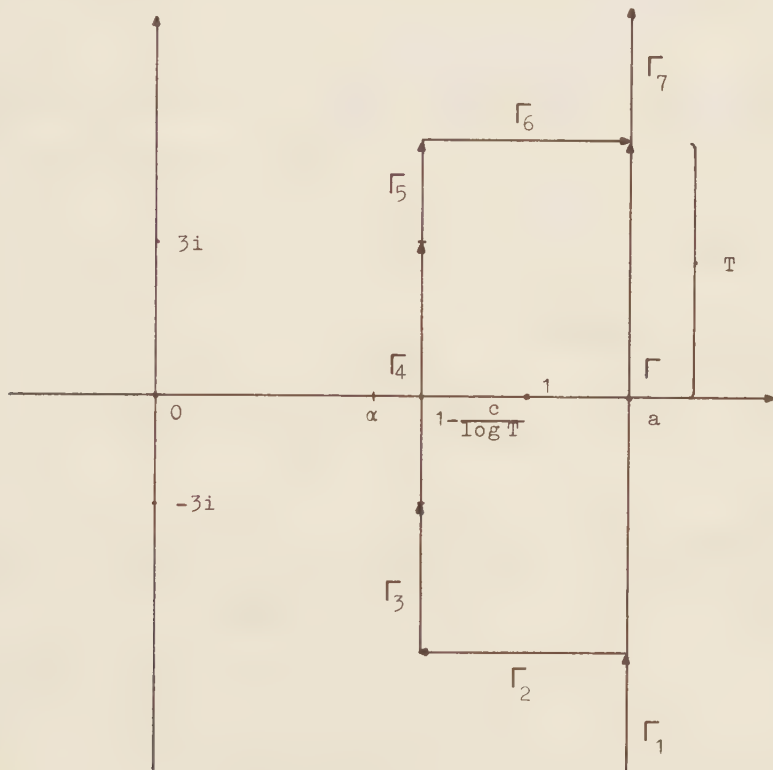
da diese Reihe für $a > 1$ konvergiert (und $= - \frac{\zeta'_G}{\zeta_G}(a)$ ist).

Analog kann man für $T \longrightarrow -\infty$ vorgehen.

Damit gilt (31) für jedes $x > 0$.

Es werden nun x, T genügend groß, aber fest gewählt.

Dann betrachte man folgenden Integrationsweg :



Das c ist das C aus Hilfssatz 5.

Mit (31) gilt zunächst :

$$\sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) \left(1 - \frac{Ng}{x}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1, \Gamma_7} x^s \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} (s(s+1))^{-1} ds.$$

Nun ersetze man die Integration über Γ durch die über Γ_2 bis Γ_6 . Auf Grund der Hilfssätze 3 und 4 ergibt sich für genügend großes T nach dem Residuensatz wegen

$$\operatorname{Res}_{s=1} \left\{ x^s \frac{L'}{L}(s, \chi) (s(s+1))^{-1} \right\} = - \frac{B(\chi)}{2} x$$

nach (26) nun

$$\sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) \left(1 - \frac{Ng}{x}\right) = \frac{B(\chi)}{2} x - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \dots \Gamma_7} x^s \frac{L'}{L}(s, \chi) (s(s+1))^{-1} ds$$

Die Integrale werden nun einzeln für $T \longrightarrow \infty$ abgeschätzt :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1, \Gamma_7} x^s \frac{L'}{L}(s, \chi) (s(s+1))^{-1} ds &= O(x^a \int_T^\infty \log t \, t^{-2} dt) \text{ nach (29)} \\ &= O(x^a \log^3 T \, T^{-1}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2, \Gamma_6} x^s \frac{L'}{L}(s, \chi) (s(s+1))^{-1} ds &= O(\log^3 T \, T^{-2} \int_{1-\frac{c}{\log T}}^a x^\sigma d\sigma) \\ &= O(x^a \log^3 T \, T^{-2}) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3, \Gamma_5} x^s \frac{L'}{L}(s, \chi) (s(s+1))^{-1} ds &= O(x^{1-\frac{c}{\log T}} \int_3^T \log^3 T \, t^{-2} dt) \\ &= O(x^{1-\frac{c}{\log T}} \log^3 T) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} x^s \frac{L'}{L}(s, \chi) (s(s+1))^{-1} ds &= \int_{-3}^3 x^s \left(\frac{L'}{L}(s, \chi) + \frac{B(\chi)}{s-1} \right) (s(s+1))^{-1} ds \\ &\quad - B(\chi) \int_{-3}^3 x^s (s(s+1)(s-1))^{-1} ds . \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{L'}{L}(s, \chi) + \frac{B(\chi)}{s-1}$ dort holomorph, so daß weiter gilt :

$$\int_4^{\infty} x^s \frac{L'}{L}(s, \chi) (s(s+1))^{-1} ds = O(1) + O(x^{1-\frac{c}{\log T}} \log T) \\ = O(x^{1-\frac{c}{\log T}} \log T).$$

Insgesamt ergibt sich damit :

$$\sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) (1 - \frac{Ng}{x}) = \frac{B(\chi)}{2} x + O(x^a \log^3 T T^{-1}) + \\ + O(x^{1-\frac{c}{\log T}} \log^3 T).$$

Setzt man hier nun

$$a = 1 + \log x$$

und

$$\log T = \sqrt{\log x},$$

so hat man für alle Restglieder zusammen

$$O(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})) \quad \text{für ein } c_1 > 0.$$

Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen .-

Um von

$$\sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) (x - Ng)$$

auf

$$\psi(x, \chi) := \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g)$$

zu schließen, beachte man

$$\begin{aligned}
 \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) (x - Ng) &= \int_{1-}^x (x - y) d\psi(y, \chi) \\
 &= \psi(y, \chi) (x - y) \Big|_{1-}^x + \int_{1-}^x \psi(y, \chi) dy \\
 &= \int_{1-}^x \psi(y, \chi) dy \quad .
 \end{aligned}$$

Für jedes $\chi \in K$ gilt nun nach Hilfssatz 6

$$(32) \quad \int_{1-}^x \psi(y, \chi) dy = \frac{B(\chi)}{2} x^2 + O(x^2 \exp(-c_1 \sqrt{\log x})) \quad .$$

Ist nun $H \in G/U$ eine festgewählte Nebenklasse mod U , so gilt nach den bekannten Orthogonalitätsrelationen für Charaktere :

$$\psi(x, H) := \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_G(g) = \frac{1}{h} \sum_{\chi} \overline{\chi(H)} \psi(x, \chi)$$

und damit nach (32)

$$(33) \quad \int_{1-}^x \psi(y, H) dy = \frac{D(H)}{2} x^2 + O(x^2 \exp(-c_1 \sqrt{\log x})) \quad ,$$

wenn zur Abkürzung

$$(34) \quad D(H) := \frac{1}{h} \sum_{\chi} \overline{\chi(H)} B(\chi)$$

gesetzt wird.

Aus (33) erhält man nun ganz analog zum klassischen Fall (siehe z.B. AYOUB [4] , S. 76) :

Satz 1

Es gibt ein $c_2 > 0$, so daß für jedes $H \in G/U$ gilt :

$$\psi(x, H) = \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_G(g) = D(H) x + O(x \exp(-c_2 \sqrt{\log x})) .$$

Bezüglich der $D(H)$ zeigen wir zunächst nur :
Es gilt

$$0 \leq D(H) \leq 1$$

und

$$(35) \quad \sum_H D(H) = 1 .$$

Eine genauere Bestimmung von $D(H)$ findet man bei FORMAN and SHAPIRO [16] , Theorem 3.1 .

(33) ergibt

$$\frac{1}{x^2} \int_{1-}^x \psi(y, H) dy = \frac{D(H)}{2} + o(1) .$$

Nun gilt offensichtlich stets $\psi(y, H) \geq 0$, woraus unmittelbar $D(H) \geq 0$ folgt.

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \sum_H D(H) &= \frac{1}{h} \sum_H \sum_X \overline{X}^{(H)} B(X) \\ &= \frac{1}{h} \sum_X B(X) \sum_H \overline{X}^{(H)} \\ &= B(X_1) = 1 \quad \text{und damit auch} \quad D(H) \leq 1 . \end{aligned}$$

4. 2. Beweis des Primzahlsatzes

mit Restglied

In diesem Abschnitt wird ein weiterer Beweis des Primzahlsatzes mit verschiedenen Restgliedern durchgeführt werden.

Wir unterscheiden dabei zwei Fälle, je nachdem ob $K''' \neq \emptyset$ gilt oder nicht.

Im ersteren Fall (4.1) werden wir wiederum mit analytischen Methoden vorgehen und dabei ein wesentlich kleineres Restglied im Primzahlsatz als das in Satz 1 erzielte erhalten.

Dagegen führt im zweiten Teil (4.2) bei $K''' = \emptyset$ die elementare Methode von WIRSING [36] zum Ziel.

4.1 Analytische Methode im

Falle $K''' \neq \emptyset$

Im folgenden wird zunächst gezeigt, daß die (algebraische) Eigenschaft $K''' \neq \emptyset$ äußerst nützliche analytische Eigenschaften der L-Funktionen zur Folge hat :

Alle L-Funktionen verschwinden nicht in einer Halbebene der Form $\sigma > \beta$ für ein geeignetes $\beta < 1$ mit eventueller Ausnahme des Punktes $s = 1$.

Man kann dann die Beweismethode des 3. Abschnittes weitgehend übernehmen und erhält damit ein weit schärferes Resultat (Satz 2) als das früher (Satz 1) erzielte.

Aus (6) folgt, da $K''' \neq \emptyset$ gilt :

$$(36) \quad \sum_{\chi} B(\chi) = 0 \quad .$$

Nun betrachte man für $\sigma > 1$ die Funktion

$$(37) \quad f(s) := \prod_{\chi} L(s, \chi) \quad .$$

Nach (16) und (22) ist $f(s)$ dort holomorph und $\neq 0$, also können wir (37) logarithmieren :

$$\begin{aligned} \log f(s) &= \sum_{\chi} \log L(s, \chi) \\ &= \sum_{\chi} \sum_p \left\{ \chi(p) Np^{-s} + \frac{1}{2} \chi(p^2) Np^{-2s} + \dots \right\} \\ &= h \sum_{p \in U} Np^{-s} + \frac{h}{2} \sum_{\substack{p^2 \in U}} Np^{-2s} + \dots \\ &= g(s) = \sum_n a_n n^{-s} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_n &= h \sum_{\substack{Np=n \\ p \in U}} 1 + \frac{h}{2} \sum_{\substack{Np^2=n \\ p^2 \in U}} 1 + \dots \text{ (endl.)} \\ &\geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Das Umordnen der obigen Doppelreihe ist wegen ihrer absoluten Konvergenz gestattet.
Es folgt weiter :

$$\begin{aligned} f(s) &= e^{g(s)} = 1 + g(s) + \frac{g^2(s)}{2!} + \dots \\ &= \sum_n b_n n^{-s} \quad \text{mit} \quad b_n \geq 0, \text{ wegen} \\ &\quad a_n \geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Sei η die Absolutkonvergenzabszisse der DIRICHLET-Reihe von g .

Da mit $g(s)$ auch $1 + g(s) + \frac{g^2(s)}{2!} + \dots$ konvergiert, folgt $\eta \leq 1$.

Weiter ist η endlich wegen der Minorante von $g(s)$:

$$\sum_{p^h \in U} Np^{-hs} = \sum_p Np^{-hs} ;$$

denn diese DIRICHLET-Reihe hat, wie man leicht sieht, $\frac{1}{h}$ als Konvergenzabszisse (wegen der Divergenz von

$$\sum_p \frac{1}{p}) .$$

Damit gilt:

$$\frac{1}{h} \leq \eta \leq 1 .$$

Ist nun $K''' \neq \emptyset$, so ist f für $\sigma > \alpha$ holomorph, da sich in $s=1$ die Pole der $L(s, \chi)$ mit $\chi \in K'$ genau gegen die Nullstellen der $L(s, \chi)$ mit $\chi \in K'''$ wegheben, da nach (6) K' und K''' die gleiche Anzahl von Elementen haben.

Nach einem bekannten Satz von LANDAU (siehe z.B. PRACHAR [34], S. 375) ist η wegen $b_n \geq 0$ eine singuläre Stelle von f . Daher gilt

$$\eta \leq \alpha .$$

Insbesondere gilt damit

$$(38) \quad \frac{1}{h} \leq \alpha .$$

Dies ist ein schwächeres Resultat als (7) .

Mit (25) hat man für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} -\frac{f'}{f}(s) &= -\sum_{\chi} \frac{L'}{L}(s, \chi) \\ &= \sum_{\chi} \sum_{g} \chi(g) \Lambda_G(g) N g^{-s} \\ &= \sum_n c_n n^{-s} \end{aligned}$$

mit

$$c_n = \sum_{\substack{Ng=n \\ g \in U}} \Lambda_G(g)$$

$$\geq 0 .$$

Nun ist $\frac{f'}{f}(s)$ holomorph in $\sigma > 1$ und wegen (36) und (26) auch noch für $|s-1| < \gamma$ mit dem $\gamma > 0$ aus (26) . Wieder nach dem schon oben zitierten Satz von LANDAU gilt für die Konvergenzabszisse κ von $\frac{f'}{f}$

$$\kappa \leq 1 - \gamma .$$

Hieraus ergibt sich, daß $\frac{f'}{f}$ in $\sigma > 1 - \gamma$ holomorph ist, und weiter, daß f dort nicht verschwindet, und schließlich

Hilfssatz 7 :

Für jedes $\chi \in K$ gilt :

$$(39) \quad L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{in } \sigma > 1 - \gamma, s \neq 1$$

mit dem $\gamma > 0$ aus (26) .

Hieran schließt sich unmittelbar an :

Hilfssatz 8 :

Für jedes $\chi \in K$ und jedes fest gewählte γ' mit $0 < \gamma' < \gamma$ gilt für $T \longrightarrow \infty$:

$$(40) \quad \frac{L'}{L}(s, \chi) = - \frac{B(\chi)}{s-1} + O(\log T) \quad \text{gleichmäßig} \\ \text{für alle } s \text{ mit } 1-\gamma' \leq \sigma \leq 2; |t| \leq T.$$

Beweis :

Setzt man

$$\eta(s, \chi) = (s-1)^{B(\chi)} L(s, \chi) ,$$

dann ist $\eta(s, \chi)$ in $1-\gamma' \leq \sigma \leq 2$ holomorph und $\neq 0$.
Mit

$$r_1 = 1 + \gamma' ; \quad r_2 = 1 + \gamma$$

ist dann

$$g(z, \chi) := \int_{2+it}^{2+it+z} \frac{\eta'(w, \chi)}{\eta(w, \chi)} dw ,$$

wobei die Integration geradlinig erfolgen soll,

für alle z mit $|z| < r_2$ holomorph.
Es gilt noch

$$(41) \quad e^{g(z, \chi)} = \frac{\eta(2+it+z, \chi)}{\eta(2+it, \chi)} .$$

Als nächstes wird $e^{g(z, \chi)} = O(T^2)$ für alle $|z| \leq r_1$,

$|t| \leq T$ und $\chi \in K$ nachgewiesen, indem folgende Fälle unterschieden werden :

1) $\chi \in K'$

Nach (17) ist

$$\eta(s, \chi) = A(\chi) + O\left(\frac{|s|^2}{\sigma - \alpha}\right) \quad \text{für } \alpha < \sigma < 4, \\ |t| \longrightarrow \infty$$

und weiter

$$\eta(2+it+z, \chi) = A(\chi) + O\left(\frac{|2+it+z|^2}{2+x-\alpha}\right), \text{ wenn} \\ z = x + iy, \\ = O(T^2) \quad \text{für } z \leq r_1$$

und

$$\begin{aligned} |\eta(2+it, \chi)|^{-1} &= \frac{1}{|1+it|} |L(2+it, \chi)|^{-1} \\ &\leq |L(2+it, \chi)|^{-1} \\ &\leq \prod_p (1+Np^{-2}) \leq \prod_p (1-Np^{-2})^{-1} \\ &= \zeta_G(2) = O(1), \end{aligned}$$

also

$$e^g(z, \chi) = O(T^2).$$

2) $\chi \in K''$

Dann ist für $|z| \leq r_1$ mit (17)

$$|\eta(2+it, \chi)|^{-1} = |L(2+it, \chi)|^{-1} = \prod_p |1 - (p)Np^{-2-it}| = O(1)$$

und

$$\begin{aligned}\eta(2+it+z, X) &= L(2+it+z, X) = O\left(\frac{|2+it+z|}{2+x-\alpha}\right) \\ &= O(T) \quad ,\end{aligned}$$

also wieder

$$e^{g(z, X)} = O(T) = O(T^2) \quad .$$

3) $\chi \in K'''$.

Sei zunächst $|t| > 2$. Dann ist für $|z| \leq r_1$

$$|\eta(2+it+z, X)| = \frac{|L(2+it+z, X)|}{|1+it+z|} = O(1) \quad \text{nach (14)}$$

und

$$|\eta(2+it, X)|^{-1} = |1+it| |L(2+it, X)|^{-1} = O(T) \quad \text{wie in 1) oder 2) .}$$

Damit haben wir

$$\frac{\eta(2+it+z, X)}{\eta(2+it, X)} = O(T)$$

für alle t mit $2 < |t| \leq T$ und $|z| \leq r_1$. Dann gilt diese Abschätzung auch für $0 \leq |t| \leq 2$, da dort die linke Seite holomorph ist.

Insgesamt ist damit, wie gewünscht, für jedes $\chi \in K$ nachgewiesen :

$$e^{g(z, X)} = O(T^2) \quad \text{für } |z| \leq r_1, |t| \leq T$$

oder

$$(42) \quad \operatorname{Re} g(z, X) = O(\log T) \quad \text{für } T \longrightarrow \infty.$$

Hier kann man nun Theorem 13 aus dem Buch von ESTERMANN [13] anwenden :

(Theorem 13 :

Sei $0 < r_1 < r_2$; $g(z)$ holomorph für $|z| < r_2$;
 $g(0) = 0$ und $\operatorname{Re} g(z) \leq M$ für $|z| = r_1$.

Dann gilt :

$$g'(z) \leq 2 M r_1 (r_1 - |z|)^{-2} \quad \text{für } |z| < r_1 .)$$

Dieses Theorem liefert mit $g(z) = g(z, X)$, $M = C \log T$,
da $\sigma - 2 < r_1$ gilt,

$$\left| \frac{\eta'}{\eta}(s, X) \right| = |g'(s - 2 - it, X)| = |g'(\sigma - 2, X)|$$

$$\leq 2 C \log T (r_1 + \sigma - 2)^{-2}$$

$$= O(\log T), \text{ wobei die } O\text{-Konstante von } \gamma' \text{ abhängen kann.}$$

Wir sind nun in der Lage, den Primzahlsatz mit Restglied mit analytischen Methoden zu beweisen :

Es gilt :

Satz 2 : $(K''' \neq \emptyset)$

Für jedes ε mit $0 < \varepsilon < \gamma$ und jedes $H \in G/U$
gilt :

$$\Psi(x, H) = \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_g(g) = D(H) x + O(x^{1-\gamma+\varepsilon} \log^2 x)$$

mit dem $\gamma > 0$ aus (26) .

Beweis :

Wir gehen diesmal aus von der Formel des 'Diskontinuierlichen Faktors' in der Form :

Ist $a > 0$, $T > 0$, $x > 0$, $x \neq 1$, so gilt :

$$(43) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \frac{ds}{s} - E(x) \right| \leq \frac{x^a}{\pi T |\log x|} ,$$

wobei

$$E(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x > 1 \\ 0 & , \text{ falls } x < 1 \end{cases} .$$

(Beweis : siehe z.B. ESTERMANN [13] , S. 11 .)

Ist nun $f(s) = \sum_n a_n n^{-s}$, so erhält man für $x \notin \mathbb{N}$

zunächst formal aus (43) :

$$(44) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s f(s) \frac{ds}{s} - \sum_{n < x} a_n \right| \leq \frac{1}{\pi T} \sum_n \frac{|a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^a}{\left|\log \frac{x}{n}\right|} .$$

Ist nun $\sum_n a_n n^{-s}$ für $\sigma = \sigma_0 \geq 0$ absolut konver-

gent, so gilt (44) für $a > \sigma_0$, da dann die Vertauschung von Summation und Integration erlaubt ist und andererseits die unendliche Reihe auf der rechten Seite von (44) konvergiert.

In unserem Falle setzen wir

$$a_n = \sum_{Ng=n} \chi(g) \Lambda_G(g) .$$

Dann ist

$$f(s) = \sum_g \chi(g) \Lambda_g(g) N_g^{-s} = - \frac{L'}{L}(s, \chi)$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergent, so daß wir in (44)
 $a > 1$ wählen können.

Weiter gilt nach (26)

$$(45) \quad \sum_n |a_n| n^{-\sigma} \leq \sum_g \Lambda_g(g) N_g^{-\sigma} = - \frac{\zeta'_G}{\zeta_G}(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)$$

für $\sigma \longrightarrow 1+$.

a_n selbst können wir durch

$$(46) \quad |a_n| = \left| \sum_{N_g=n} \chi(g) \Lambda_g(g) \right| \leq \log n \sum_{N_g=n} 1$$

$= O(n^\alpha \log n) \quad \text{nach (1)}$

abschätzen.

Damit haben wir für $x \notin \mathbb{N}$, $a > 1$, $T > 0$

$$\begin{aligned} \psi(x, \chi) = \sum_{N_g \leq x} \chi(g) \Lambda_g(g) &= - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{ds}{s} + \\ &+ O\left(\frac{1}{T} \sum_n \frac{|a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^a}{\log \frac{x}{n}}\right). \end{aligned}$$

Die Reihe läßt sich nun folgendermaßen abschätzen :

Setzen wir $x = [x] + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Dann ist

$$1) \quad \text{für } n < \frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad n > 2x \quad \left| \log \frac{x}{n} \right| > \log 2$$

und daher

$$\sum_{\substack{n < \frac{1}{2}x \\ n > 2x}} \frac{|a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^a}{\left| \log \frac{x}{n} \right|} = O\left(\sum_n |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^a\right) = O(x^a \frac{1}{a-1})$$

nach (45) ;

und

$$2) \quad \text{für } \frac{1}{2} < \frac{x}{n} < 2 \quad \text{ist}$$

$$\left| \log \frac{x}{n} \right| = \left| \int_1^{\frac{x}{n}} \frac{du}{u} \right| \geq \frac{1}{2} \left| \frac{x}{n} - 1 \right|$$

und weiter

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{1}{2}x \leq n \leq 2x} \frac{1}{\left| \log \frac{x}{n} \right|} &\leq 2 \sum_{\frac{1}{2}x \leq n \leq 2x} \frac{1}{\left| \frac{x}{n} - 1 \right|} \\ &\leq 8x \sum_{\frac{1}{2}x \leq n \leq 2x} \frac{1}{|2x - 2n|} \\ &= O\left(x \sum_{n=0}^{\frac{2x-1}{2}} \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= O(x \log x) . \end{aligned}$$

$$\text{Mit } |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^a = O(x^a \log x) \quad \text{nach (45)}$$

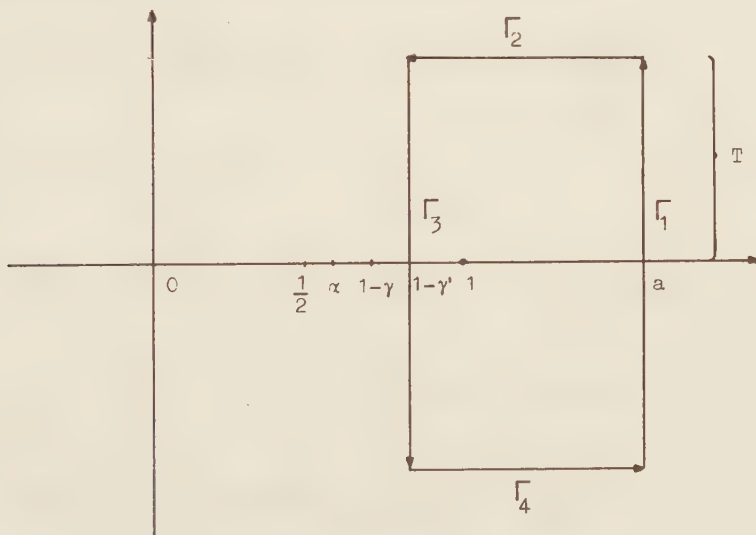
erhalten wir schließlich

$$\psi(x, \chi) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^a}{T^{a-1}}\right) + O\left(\frac{x^{1+\alpha} \log^2 x}{T}\right)$$

und weiter mit $a = 1 + \alpha$ (Dann ist $a > 1$ nach (7) oder (38))

$$\psi(x, \chi) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} x^s \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^{1+\alpha} \log^2 x}{T}\right).$$

Nun verschiebt man die Integration nach links von $\sigma = 1$:



Dabei ist $\gamma' = \gamma - \epsilon$ mit dem $\gamma > 0$ aus (26) und ϵ beliebig mit $0 < \epsilon < \gamma$.

Nach dem Residuensatz folgt wegen

$$\operatorname{Res}_{s=1} \left\{ x^s s^{-1} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right\} = -B(\chi) x \quad (\text{nach (26)})$$

weiter

$$\psi(x, X) = B(X) x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4} x^s \frac{L'(s, X)}{L(s, X)} \frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^{1+\alpha} \log^2 x}{T}\right)$$

Die Integrale werden nun einzeln mit Hilfe von Hilfs-
satz 8 für $T \longrightarrow \infty$ abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2, \Gamma_4} x^s \frac{L'(s, X)}{L(s, X)} \frac{ds}{s} &= O\left(\frac{x^{1+\alpha}}{T^2} + \frac{x^{1+\alpha} \log T}{T}\right) \\ &= O\left(\frac{x^{1+\alpha} \log T}{T}\right) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} x^s \frac{L'(s, X)}{L(s, X)} \frac{ds}{s} &= O(x^{1-\gamma'}) \int_0^T \left(\frac{1}{t+1} + \log T\right) \frac{dt}{t+1} \\ &= O(x^{1-\gamma'} \log^2 T) . \end{aligned}$$

Setzt man noch $T = x^{\gamma'+\alpha}$, so folgt für $x \longrightarrow \infty$

$$\psi(x, X) = B(X) x + O(x^{1-\gamma'} \log^2 x) .$$

Wie schon im 3. Abschnitt erhält man nach dem Über-
gang zu $\psi(x, H)$ schließlich

$$(47) \quad \psi(x, H) = D(H) x + O(x^{1-\gamma'} \log^2 x) .$$

Zwar gilt dieses Ergebnis zunächst nur für $x = [x] + \frac{1}{2}$,
dann aber auch für alle reellen x .

Damit ist Satz 2 bewiesen. -

Will man den Exponenten von x in dem Restglied von (47) verkleinern, so muß man nach Satz 2 offensichtlich das γ aus (26) vergrößern. Da ab Hilfssatz 7 die Eigenschaft $K''' \neq \emptyset$ nicht mehr eingeht, gilt Satz 2 für jedes γ , für das (39) gilt.

Definieren wir

$$\Sigma = \inf \left\{ \sigma \mid \sigma > \alpha, L(\sigma + it, \chi) \neq 0 \text{ für alle } \chi \in K, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\Gamma = \inf \left\{ \gamma \mid \psi(x, H) = D(H)x + O(x^\gamma) \text{ für alle } H \in G/U \right\},$$

so erhalten wir

$$\Gamma \leq \Sigma.$$

Die umgekehrte Richtung dieser Ungleichung, wie sie im klassischen Fall ja gilt, ist hier sicher nicht einfach zu bekommen, da stets $\Sigma \geq \alpha$ gilt und nun eventuell das Problem der analytischen Fortsetzung der $L(s, \chi)$ für s mit $\sigma < \alpha$ auftreten kann.

Bemerkung :

In diesem Zusammenhang ist auf einen bemerkenswerten Satz in dem Buch von LANDAU [29], S. 380 hinzuweisen :
Dort behandelt LANDAU das Problem der asymptotischen Primzahlverteilung, wobei er bereits Verallgemeinerungen ähnlich den hier zu Grunde gelegten zuläßt und für die dann gebildete ζ -

Funktion die gleichen Eigenschaften fordert, wie wir sie für die ζ_G -Funktion in den Hilfssätzen 1, 2 und 7 im Falle $K''' \neq \emptyset$ nachgewiesen haben.

FORMAN and SHAPIRO [16] haben in ihrer Arbeit einige Beispiele für K mit $K''' \neq \emptyset$ angegeben, z.B.: Sei G die Gruppe der positiven rationalen Zahlen. Für $r \in G$ und $r = \prod p_i^{\alpha_i}$ sei $\tau(r) = \sum \alpha_i$. Als Untergruppe U nehme man alle r aus G mit $\tau(r) \equiv 0 \pmod{2}$. Dann ist $[G/U] = 2$, und die Nebenklassen mod U können durch U und $2U$ repräsentiert werden. Nun ist

$$\sum_{\substack{n < x \\ n \notin U}} 1 \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{n < x \\ n \in 2U}} 1 = \frac{1}{2}x + O(x^\alpha) \quad \text{mit } 0 \leq \alpha < 1,$$

wenn man annimmt, daß die gewöhnliche RIEMANNsche ζ -Funktion für $\sigma > \alpha'$ ($\alpha' < \alpha$) nicht verschwindet. Ist insbesondere die RIEMANNsche Vermutung ($\alpha' = \frac{1}{2}$) erfüllt, so kann $\alpha = \frac{1}{2} + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ gewählt werden.

Hilfssatz 7 sagt nun in der umgekehrten Richtung aus :

Ist G die Gruppe der positiven rationalen Zahlen und gibt es eine Untergruppe U von endlichem Index in G , so daß für jede Nebenklasse $H \in G/U$ gilt

$$\sum_{\substack{n < x \\ n \in H}} 1 = c_H x + O(x^\alpha) \quad \text{mit } 0 \leq \alpha < 1$$

$$\text{und } \sum_H c_H > 0,$$

so gibt es, wenn noch $K''' \neq \emptyset$ ist, ein $\gamma > 0$ mit

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für } \sigma > 1 - \gamma > \alpha .$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß man als Normfunktion N den gewöhnlichen absoluten Betrag gewählt hat.

Um nun die RIEMANNsche Vermutung nachzuweisen, würde es ausreichen, eine Untergruppe U mit $\alpha = \frac{1}{2}$ anzugeben, für die $K''' \neq \emptyset$ und für jedes $\chi \in K \setminus L(\sigma, \chi)$ in $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ holomorph und $\neq 0$ ist, denn dann kann in (39) $\gamma = \frac{1}{2}$ gewählt werden.

Für $\chi = \chi_1$ hat man ja $L(s, \chi_1) = \zeta(s)$ und hier gilt bekanntlich $\zeta(\sigma) \neq 0$ für $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Zu untersuchen blieben die $L(s, \chi)$ mit $\chi \neq \chi_1$.

Die klassischen DIRICHLET-Reihen $L(s, \chi_k)$, wobei χ_k ein Charakter der primen Restklassengruppe mod k ist, können dabei allerdings nicht auftreten, wie bereits früher (im Anschluß an (20)) bemerkt wurde.

4.2 Elementare Methode im

Falle $K''' = \emptyset$

Das bis heute beste mit elementaren Methoden erreichbare Restglied im klassischen Primzahlsatz kann mit einer Iterationsmethode von WIRSING [36] erhalten werden. In einer Skizze zeigte WIRSING die Übertragung dieser Methode auf den Primzahlsatz für die arithmetische Progression, wobei er $L(1, \chi_k) \neq 0$ für jeden Nichthauptcharakter mod k als dort elementar beweisbare Tatsache voraussetzen konnte.

Während WEGMANN [35] die WIRSINGsche Beweismethode des gewöhnlichen Primzahlsatzes mit Restglied bei freien Halbgruppen verwendet hat, wird hier im folgenden eine Verallgemeinerung des Primzahlsatzes für die arithmetische Progression mit Restglied angestrebt.

Die Beweise der nun folgenden Hilfssätze konnten da reduziert werden, wo die entsprechenden Aussagen ganz analog bereits von WIRSING ausführlich behandelt wurden.

Gegenüber WIRSING abweichend ist u.a. die zusätzliche Ungleichung (82) .

Von entscheidender Bedeutung ist später ein Ergebnis von WIRSING, nämlich :

Hilfssatz 9 :

Es seien f und g reellwertige L -meßbare Funktionen über $[0, \infty]$ und es gelte

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f^2(y) dy = F ; \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x g^2(y) dy = G .$$

Die Funktion

$$h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(x-y)g(y)dy \quad (x > 0)$$

erfülle

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x h(y) dy = 0 .$$

Dann ist

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x h^2(y) dy \leq \frac{1}{2} FG .$$

Im folgenden werden gelegentlich RIEMANN - STIELTJES - Integrale auftreten, wobei nicht, wie früher, eine der Funktionen überall differenzierbar ist. Um die Existenz dieser Integrale zu sichern, werden wir von nun an $x \notin \mathbb{N}$ voraussetzen.

Im übrigen werden wir die WIRSINGsche Bezeichnungsweise weitgehend beizubehalten versuchen.

Mit Hilfe der in (10) definierten μ_G -Funktion läßt sich auch hier die folgende MÖBIUSSche Umkehrformel formulieren :

Sei P eine komplexwertige, multiplikative Funktion, definiert für alle ganzen $g \in G$; (d.h. $P(gg') = P(g)P(g')$ und $P(e) = 1$) ; f eine beliebige komplexwertige Funktion definiert für alle $x > 0$, dann ist

$$(48) \quad g(x) := \sum_{Ng \leq x} P(g) f\left(\frac{x}{Ng}\right) \quad \text{für alle } x > 0$$

gleichbedeutend mit

$$(49) \quad f(x) = \sum_{Ng \leq x} P(g) \mu_G(g) g\left(\frac{x}{Ng}\right) \quad \text{für alle } x > 0 .$$

Der Beweis verläuft völlig analog zum klassischen Fall, wobei wesentlich Gebrauch von (12) gemacht wird.

Nützlich für viele Abschätzungen ist

Hilfssatz 10 :

Für $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, mit $0 \leq \gamma < 1$ und $\delta \geq 0$ gilt

$$(50) \quad \sum_{Ng \leq x} Ng^{-\gamma} \log \delta\left(\frac{x}{Ng}\right) = O(x^{1-\gamma})$$

Beweis :

Sind γ und δ fest gewählt und $B(x) = \sum_{Ng \leq x} 1 = cx + O(x^\alpha)$

(nach (1)) gesetzt, so gilt für $x > 1$:

$$\left| \sum_{Ng \leq x} Ng^{-\gamma} \log \delta\left(\frac{x}{Ng}\right) \right| \leq C x^{\frac{1-\gamma}{2}} \sum_{Ng \leq x} Ng^{-\frac{\gamma+1}{2}},$$

wegen $\left| \log \delta\left(\frac{x}{Ng}\right) \right| \leq C \left(\frac{x}{Ng}\right)^{\frac{1-\gamma}{2}}.$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{Ng \leq x} Ng^{-\frac{\gamma+1}{2}} &= \int_1^x y^{-\frac{\gamma+1}{2}} dB(y) \\ &= x^{-\frac{\gamma+1}{2}} B(x) + \int_1^x B(y) \frac{\gamma+1}{2} y^{-\frac{\gamma+3}{2}} dy \\ &= O\left(x^{\frac{1-\gamma}{2}}\right), \text{ wenn man lediglich } B(x) = O(x) \text{ berücksichtigt.} \end{aligned}$$

Bezüglich der in (11) definierten verallgemeinerten v.MANGOLDTschen Funktion Λ_G gelten, wie im klassischen Fall

$$(51) \quad \log Ng = \sum_{d|g} \Lambda_G(d)$$

und

$$(52) \quad \Lambda_G(g) = \sum_{d|g} \mu_G(d) \log N_d^g,$$

was sich sofort auf direktem Wege nachweisen läßt.

Das WIRSINGsche Beweisverfahren funktioniert nun so, daß man sich für jedes $\chi \in K = K' \cup K''$ eine bestimmte Funktion $r(x, \chi)$ und andere damit zusammenhängende Hilfsfunktionen definiert und dafür bestimmte Gleichungen ((66), (67)) herleitet. Hiervon ausgehend erhält man als Ergebnis Satz 3 durch ein Iterationsverfahren und Induktion im Kontinuum.

4.2.1 $\chi \in K'$

Von nun an sei χ stets aus K' .

Dann gilt

Hilfssatz 11 :

Es ist

$$m(x) = m(x, \chi) = \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1}$$

$$= o(1) \quad \text{für } x \longrightarrow \infty.$$

Beweis :

Setzt man in der MÖBIUSSchen Umkehrformel $P = \chi$ und $f \equiv 1$, so erhält man aus (49) unter Beachtung von (9) und Hilfssatz 10

$$A(\chi) \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} = o(1).$$

Wegen $A(\chi) \neq 0$, ist Hilfssatz 11 bewiesen.-

Wir setzen nun für $x \geq 0$:

$$(53) \quad r(x) = r(x, \chi) = \begin{cases} \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} (A^{-1} - \Lambda_g(g)) - 2A^{-1}L_0 & \text{für } x \geq \\ 0 & \text{für } x < \end{cases}$$

Dabei ist $A = A(\chi)$ und $L_0 = L_0(\chi)$ (siehe : (2) bzw. (3)).

Weiter setzen wir

$$(54) \quad s(x) = s(x, \chi) = \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} r\left(\frac{x}{Ng}\right) \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Bezüglich der asymptotischen Entwicklung von $s(x)$ für $x \longrightarrow \infty$ gilt nun der

Hilfssatz 12 :

Es ist

$$s(x) = s(\infty) + O(x^{\frac{\alpha-1}{2}} \log x) \quad .$$

Der Beweis verläuft ganz analog wie bei WIRSING (Teil I). Aus den Hilfssätzen 11 und 12 läßt sich leicht herleiten :

Hilfssatz 13 :

Es ist

$$r(x) = O(1) \quad .$$

Beweis :

Aus der Eigenschaft (12) der μ_α -Funktion folgt

$$\begin{aligned}
 r(x) &= \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} s\left(\frac{x}{Ng}\right) && \text{und weiter} \\
 &= \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} \left\{ s(\infty) + O\left(\left(\frac{x}{Ng}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \log \frac{x}{Ng}\right) \right\} \\
 &= s(\infty) \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} + O\left(x^{\frac{\alpha-1}{2}} \sum_{Ng \leq x} Ng^{-\frac{\alpha+1}{2}} \log \frac{x}{Ng}\right) \\
 &= O(1) \quad .-
 \end{aligned}$$

Damit sind wir in einer sehr ähnlichen Ausgangssituation wie WIRSING mit den Formeln (13), (14) in seiner Arbeit II .

Die folgenden Hilfssätze 14, 15, 16 entsprechen genau den WIRSINGschen Hilfssätzen 2, 3, 4 .

Die Beweise lassen sich leicht übertragen und verlaufen dann ganz analog. Nur an Stellen, wo mehr als nur die multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen benutzt werden, etwa additive oder Ordnungsbegriffe, sind Zusatzüberlegungen nötig, die im folgenden angegeben werden.

Mit a werde stets eine nichtnegative reelle Zahl bezeichnet.

Es folgt

Hilfssatz 14 :

Aus $r(x) = O(\log^{-a} x)$ folgt $m(x) = O(\log^{-a} x)$.

Beweis :

Da für großes x gilt :

$$\sum_{Ng \leq x} Ng^{-1} = O(\log x)$$

und damit wegen Hilfssatz 13 auch

$$\sum_{Ng \leq x} \Lambda_G(g) Ng^{-1} = O(\log x) \quad ,$$

lassen sich alle Schlüsse des WIRSINGschen Beweises
(von Hilfssatz 2) bis zur Ungleichung

$$|m(x)| \leq \frac{4}{5} M \log^{-a} x$$

übertragen.

Für $x < y \leq x+1$ wird dann

$$|m(y)| \leq |m(x)| + x^{-1} \sum_{x < Ng \leq x+1} 1$$

$$\leq \frac{4}{5} M \log^{-a} x + \text{const } x^{\alpha-1} \quad \text{nach (1)}$$

$$\leq M \log^{-a} y \quad .$$

Der Rest des Beweises läßt sich dann unverändert übernehmen.

Hilfssatz 15 :

Aus $r(x) = O(\log^{-a} x)$ folgt

$$\sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) Ng^{-1} \log \frac{x}{Ng} = \frac{1}{A} + O(\log^{-a} x \log \log x) \quad .$$

Beweis :

Hier läßt sich der gesamte WIRSINGsche Beweis ohne größere Modifikationen übertragen.

Es folgt deshalb gleich

Hilfssatz 16 :

Aus $r(x) = O(\log^{-a}x)$ folgt :

$$(55) \quad r(x) \log x + \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \wedge_G(g) Ng^{-1} r\left(\frac{x}{Ng}\right) = s(\infty) + O(\log^{-a}x \log^3 \log x)$$

und

$$(56) \quad r(x) \log x = \int_1^x r\left(\frac{x}{y}\right) dr(y) + O(\log^{-a}x \log^3 \log x) .$$

Beweis :

Wählt man wie bei WIRSING x_1 und x_2 mit $x_1 x_2 = x$ geeignet, so läßt sich die im Beweis auftretende erste Teilsumme unter Benutzung von Hilfssatz 10 wie gewünscht abschätzen.

Benutzt man noch

$$\begin{aligned} \int_1^x |ds(y)| &\leq \sum_{Ng \leq x} Ng^{-1} \left| r\left(\frac{x}{Ng}\right) \right| \\ &\leq \sum_{Ng \leq x} Ng^{-1} \left[\sum_{Ng' \leq \frac{x}{Ng}} Ng'^{-1} \left\{ \frac{1}{A} + \wedge_G(g') \right\} + \text{const} \right] \\ &= O\left(\sum_{Ng \leq x} Ng^{-1} \log \frac{x}{Ng} + \log x \right) \end{aligned}$$

so läßt sich auch der Rest des Beweises übertragen. -

4.2.2 $\chi \in K''$

Sei nun stets χ aus K'' .

Dann gilt, ganz wie in Hilfssatz 11 :

Hilfssatz 17 :

Es ist

$$\sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} = o(1) \quad .$$

Beweis :

Setzt man in der MÖBIUSSchen Umkehrformel (48), (49)

$P(g) = \chi(g) Ng^{-1}$ und $f \equiv 1$, so ergibt sich

$$g(x) = \sum_{Ng \leq x} P(g) f\left(\frac{x}{Ng}\right) = \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1}$$

$$= L_0 + o(x^{\alpha-1}) \quad \text{nach (2) .}$$

Dies liefert nun :

$$1 = \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} g\left(\frac{x}{Ng}\right)$$

$$= \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} \left\{ L_0 + o\left(\left(\frac{x}{Ng}\right)^{\alpha-1}\right) \right\}$$

$$= L_0 \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} + o(1)$$

nach Hilfssatz 10 .

Da für $\chi \in K''$ gilt $L_0(\chi) \neq 0$, ist Hilfssatz 17 damit bewiesen.-

Für $x \geq 0$ setzen wir

$$(57) \quad r(x) = r(x, \chi) = \begin{cases} - \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) Ng^{-1} + \frac{L_1}{L_0} , & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & , \text{für } x < 1 . \end{cases}$$

Wie in (54) definieren wir

$$(58) \quad s(x) = s(x, \chi) = \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} r\left(\frac{x}{Ng}\right) \quad \text{für alle } x \geq 0 .$$

Hilfssatz 12 entspricht nun

Hilfssatz 18 :

Es gilt

$$s(x) = O(x^{\alpha-1} \log x) \quad \text{für } x \longrightarrow \infty .$$

Beweis :

Es ist

$$s(x) = \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} r\left(\frac{x}{Ng}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} \left\{ - \sum_{Ng \leq \frac{x}{Ng}} \chi(g) \wedge_G(g) Ng^{-1} + \frac{L_1}{L_0} \right\} \\
 &= - \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \wedge_G(g) Ng^{-1} + \frac{L_1}{L_0} \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} \\
 &= - \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \log Ng Ng^{-1} + \frac{L_1}{L_0} \left\{ L_0 + O(x^{\alpha-1}) \right\} \\
 &\quad \text{nach (51), (2)} \\
 &= - L_1 + O(x^{\alpha-1} \log x) + L_1 + O(x^{\alpha-1}) \quad \text{nach (2)} \\
 &= O(x^{\alpha-1} \log x) \quad .-
 \end{aligned}$$

Entsprechend Hilfssatz 13 gilt auch hier

Hilfssatz 19 :

Es ist

$$r(x) = O(1) \quad .$$

Beweis :

$$\begin{aligned}
 r(x) &= \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} s\left(\frac{x}{Ng}\right) \\
 &= O\left(x^{\alpha-1} \sum_{Ng \leq x} Ng^{\alpha} \log \frac{x}{Ng}\right)
 \end{aligned}$$

nach Hilfssatz 18,

$$= O(1) \quad \text{nach Hilfssatz 10 .-}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 (59) \quad m(x) = m(x, X) &= \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \mu_G(g) Ng^{-1} - \frac{1}{L_0} \\
 &= O(1)
 \end{aligned}$$

nach Hilfssatz 17 definieren wir schließlich noch die Funktion

$$(60) \quad t(x) = t(x, X) = \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} m\left(\frac{x}{Ng}\right),$$

für die gilt :

Hilfssatz 20 :

Es ist

$$t(x) = O(x^{\alpha-1}) .$$

Beweis :

Es ist

$$\begin{aligned}
 t(x) &= \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} \left\{ \sum_{Ng' \leq \frac{x}{Ng}} \chi(g') \mu_G(g') Ng'^{-1} - \frac{1}{L_0} \right\} \\
 &= \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} \sum_{d|g} \mu_G(d) - \frac{1}{L_0} \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} \\
 &\approx O(x^{\alpha-1}) \quad \text{nach (2), (12) .-}
 \end{aligned}$$

Um das Analogon zu Hilfssatz 14

Hilfssatz 21 :

Aus $r(x) = O(\log^{-a}x)$ folgt $m(x) = O(\log^{-a}x)$.

zu beweisen, kann man genau so vorgehen, wie es WIRSING in seiner Skizze vorgeschlagen hat :

Man zeigt zunächst :

Aus $r(x) = O(\log^{-a}x)$ und $m(x) = O(\log^{\frac{1}{2}-a}x)$ folgt $m(x) = O(\log^{-a}x)$

und erhält hieraus leicht Hilfssatz 21 .

Ohne große Schwierigkeit ergibt sich dann das Analogon zu Hilfssatz 16 , nämlich :

Hilfssatz 22 :

Aus $r(x) = O(\log^{-a}x)$ folgt

$$(61) \quad r(x) \log x + \sum_{Ng \leq x} \chi(g) \Lambda_G(g) Ng^{-1} r\left(\frac{x}{Ng}\right) = O(\log^{-a}x \log^3 \log x)$$

und

$$(62) \quad r(x) \log x = \int_1^x r\left(\frac{x}{y}\right) dr(y) + O(\log^{-a}x \log^3 \log x) .$$

4.2.3 Iteration

Um zu reellen Funktionen zu kommen, definieren wir für jedes $H \in G/U$

$$(63) \quad r(x, H) = \frac{1}{h} \sum_{\chi \in K} \bar{\chi}(H) r(x, \chi) .$$

Nach den Hilfssätzen 13 und 19 haben wir dann

$$(64) \quad r(x, H) = O(1) \quad \text{für jedes } H \in G/U.$$

Es wird nun für jedes $H \in G/U$

$$(65) \quad r(x, H) = O(\log^{-a} x)$$

und für alle a mit $a < a_1$ mit einem beliebigen $a_1 \geq 0$ vorausgesetzt und dann mit einem $a_2 > a_1$ statt a_1 bewiesen. Die Menge der a , für die (65) gilt, ist wegen (64) nicht leer und hat dann keine endliche obere Grenze (Induktion im Kontinuum), d.h.

(65) gilt für alle $a \geq 0$.

Die Induktion beginnt bei $a_1 = 0$. Im folgenden sei stets $a \geq 0$, da wegen (64) auch (65) für $a = a_1 = 0$ gilt.

Für alle Charaktere χ aus K gilt nun, da $K''' = \emptyset$ angenommen wurde, nach (55) und (61):

$$(66, \chi) \quad r(x, \chi) \log x + \sum_{N\bar{g} \leq x} \chi(g) \wedge_G(g) N\bar{g}^{-1} r\left(\frac{x}{N\bar{g}}\right) = \frac{s(\infty, \chi)}{A(\chi)} + O(\log^{1-b} x),$$

nach (56) und (62):

$$(67, \chi) \quad r(x, \chi) \log x = \int_1^x r\left(\frac{x}{y}, \chi\right) dr(y, \chi) + O(\log^{1-b} x)$$

mit $b < a_1 + 1$ beliebig.

Geht man in (66,X) bzw. (67,X) zu den in (63) definierten reellen Funktionen über, so erhält man für jedes $H \in G/U$

$$(68,H) \quad r(x,H) \log x + \sum_{\substack{L \\ L \in G/U}} \sum_{\substack{Ng < x \\ g \in HL^{-1}}} \Lambda_G(g) Ng^{-1} r\left(\frac{x}{Ng}, L\right) = C(H) + O(\log^{1-b} x),$$

wobei $C(H)$ eine nur von H abhängige (unwichtige) Konstante ist, und

$$(69,H) \quad r(x,H) \log x = \sum_{\substack{L \\ L \in G/U}} \int_{1-}^x r\left(\frac{x}{y}, L\right) dr(y, HL^{-1}) + O(\log^{1-b} x).$$

Mit Hilfe von (68,H) läßt sich nun die für das Folgende sehr wichtige 'Schwankungsbedingung' herleiten :

Es ist für jedes $H \in G/U$:

$$(70) \quad \left| r(x,H) - r(y,H) \right| \leq \frac{M(H)}{h} |\log x - \log y| + O(\log^{-b} x).$$

wenn $x = O(y)$ und $y = O(x)$ gilt und

$$(71) \quad M(H) = \sum_{\substack{X \\ X \in K}} \bar{X}(H)$$

gesetzt wird.

Man überlegt sich zunächst sehr leicht, daß (70) nur für x, y mit $y < x < Cy$ zu beweisen ist mit einem geeignetem $C > 0$.

Setzt man in (63) die entsprechenden Formeln für $r(x, X)$ nach (53) bzw. (57) ein, so erhält man für jedes $H \in G/U$:

$$(72) \quad r(x, H) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{X \\ X \in K'}} \frac{\bar{X}(H)}{A(X)} \sum_{Ng \leq x} X(g) Ng^{-1} - \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_G(g) Ng^{-1} + c;$$

Dabei ist mit c eine angebbare, aber unwichtige Konstante bezeichnet.

Dies ergibt :

$$r(x, H) - r(y, H) = \frac{1}{h} \sum_{X \in K'} \frac{\bar{X}(H)}{A(X)} \sum_{y < Ng \leq x} X(g) Ng^{-1} - \sum_{\substack{y < Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_G(g) Ng^{-1}$$

$$\leq \frac{1}{h} \sum_{X \in K'} \frac{\bar{X}(H)}{A(X)} \sum_{y < Ng \leq x} X(g) Ng^{-1}$$

$$(73) \quad \leq \frac{M(H)}{h} \log \frac{x}{y} + O(\log^{-b} x), \text{ wegen (2).}$$

Die andere Seite der Ungleichung ergibt sich, indem man (68, H) einmal für x und einmal für y hinschreibt und dann subtrahiert. Nach einigen leichten Umformungen und unter Verwendung von (73) und (2) erhält man schließlich

$$(74) \quad r(x, H) - r(y, H) \geq -\frac{M(H)}{h} \log \frac{x}{y} + O(\log^{-b} x)$$

und ist damit wegen (73) fertig.

Bemerkungen :

- 1) In der Formel (70) sind die Voraussetzungen $x = O(y)$ und $y = O(x)$ nicht überflüssig, denn für bestimmte $H \in G/U$ kann $M(H)$ verschwinden. Im klassischen Fall (bei WIRSING) kommt dies nicht vor, denn dort ist für alle $H \in G/U$ $M(H) = 1$.
- 2) Bei der Herleitung der Formel (70) geht die Voraussetzung $K''' = \emptyset$ wesentlich ein. Nehmen wir nämlich $K''' \neq \emptyset$ an, so muß man auch für $\chi \in K'''$ die Funktion $r(x, \chi)$ geeignet definieren. Auf jeden Fall wird man dann für $r(x, H)$ eine ähnliche Formel wie (72) erhalten müssen :

$$r(x, H) = D(H) \log x - \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_G(g) Ng^{-1} + \text{const} ,$$

denn aus den Sätzen 1 bzw. 2 ergibt sich leicht durch partielle Summation, daß $r(x, H)$ diese Gestalt haben muß, wegen $r(x, H) = o(1)$. Als obere Abschätzung ((73)) erhält man hieraus

$$r(x, H) - r(y, H) \leq D(H) \log \frac{x}{y} + O(\log^{-b} x) ,$$

wenn der unübersichtliche Term $-\sum_{\substack{y < Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_G(g) Ng^{-1}$

einfach durch 0 nach oben abgeschätzt wird. Geht man nun mit dieser Abschätzung analog zu früher vor, wobei unterstellt ist, daß man eine der Formel (66, X) entsprechende für

$\chi \in K'''$ hergeleitet hat, so erhält man als untere Abschätzung

$$r(x, H) - r(y, H) \geq -T(H) \log \frac{x}{y} + O(\log^{-b} x),$$

wobei $T(H) = \frac{2M(H)}{h} - D(H)$ ist.

Nun stimmt $T(H)$ mit $D(H)$ genau dann für alle $H \in G/U$ überein, wenn $K''' = \emptyset$ gilt. Anderenfalls erhält man für einige H nur eine unsymmetrische Schwankungsbedingung, mit der sich dann der weitere Beweisgang nach WIRSING nur schwerlich fortführen läßt.

Im folgenden ersetzen wir zweckmäßigerweise die Variable x durch ξ mit $\xi = \log x$ und setzen dann

$$\rho(\xi, H) = r(x, H).$$

Die Formeln (68, H), (69, H) und (70) gehen dann über in

$$(75) \quad \xi \rho(\xi, H) + \sum_L \sum_{\substack{Ng \leq e^{\frac{1}{L}} \\ g \in HL^{-1}}} \Lambda_G(g) Ng^{-1} \rho(\xi - \log Ng, L) = C(H) + O(\xi^{1-b}),$$

$$(76) \quad \xi \rho(\xi, H) = \sum_L \int_0^\xi \rho(\xi - \eta, L) d\rho(\eta, HL^{-1}) + O(\xi^{1-b})$$

und

$$(77) \quad |\rho(\xi, H) - \rho(\eta, H)| \leq \frac{M(H)}{h} |\xi - \eta| + O(\xi^{-b}), \text{ wenn } \xi - \eta = O(1) \text{ ist.}$$

b ist dabei stets beliebig, aber fest wählbar mit

$$a_1 < b < a_1 + 1 \quad .$$

Es gibt dann ein $\delta > 0$ mit

$$b + \delta < a_1 + 1 \quad , \text{ also } \delta < 1 \quad ,$$

und

$$(78) \quad \left| \rho(\xi, H) - \rho(\eta, H) \right| \leq \frac{M(H)}{h} |\xi - \eta| + O(\xi^{-b-\delta}) \quad , \text{ wenn } \xi - \eta = O(1) \quad .$$

Wie bei WIRSING bilde man nun ausgehend von $\rho(\xi, H)$ durch lineare Interpolation mit den Stützstellen $\xi_{n+1} = \xi_n + \xi_n^{-b}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ und $\xi_0 > 0$ beliebig zunächst die Funktion $\sigma_0(\xi, H)$.

Für sie gilt nach (78) etwas schärfer als die entsprechende Formel ((23)) bei WIRSING :

$$(79) \quad \left| \sigma'_0(\xi, H) \right| \leq \frac{M(H)}{h} + O(\xi^{-\delta}) \quad \text{für } \xi \longrightarrow \infty, \xi \neq \xi_n \quad .$$

Für die weiterhin gebildeten Funktionen

$$\sigma_{n+1}(\xi, H) = \frac{1}{\xi} \sum_L \int_0^\xi \sigma_n(\xi - \eta, L) d\sigma_n(\eta, HL^{-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

läßt sich wie bei WIRSING zeigen :

$$(80) \quad \rho(\xi, H) - \sigma_n(\xi, H) = O(\xi^{-b_n}) \quad \text{mit} \quad b_n = a + \frac{b-a}{(b+1)^n}$$

für $n = 0, 1, 2, \dots$.

Die Funktionen $\sigma_n(\xi, H)$ mit $n = 1, 2, \dots$ sind für $\xi > 0$ differenzierbar und für deren Ableitungen gilt:

$$\sigma'_{n+1}(\xi, H) = -\frac{1}{\xi} \sigma_{n+1}(\xi, H) + \frac{1}{\xi} \sum_L \int_0^\xi \sigma'_n(\xi - \eta, L) \sigma'_n(\eta, HL^{-1}) d\eta .$$

Mit (80) und (64) haben wir dann

$$(81) \quad \sigma'_{n+1}(\xi, H) = \frac{1}{\xi} \sum_L \int_0^\xi \sigma'_n(\xi - \eta, L) \sigma'_n(\eta, HL^{-1}) d\eta + o(\xi^{-1}) .$$

Nun gilt (79) auch für $n = 1, 2, \dots$,
d.h.

$$(82) \quad |\sigma'_n(\xi, H)| \leq \frac{M(H)}{h} + o(\xi^{-\delta}) \quad \text{für jedes feste } n = 0, 1, \dots$$

Diese Ungleichung hat im klassischen Falle kein Analogon, dort kommt man mit $\sigma'_n(\xi, H) = o(1)$ aus.
Wir gehen zum Beweis induktiv vor und setzen (82) für ein festes $n \geq 0$ voraus.
Dann folgt weiter:

$$|\sigma'_{n+1}(\xi, H)| \leq \frac{1}{\xi} \sum_L \int_0^\xi \left\{ \left(\frac{M(L)}{h} + o(\xi - \eta)^{-\delta} \right) \left(\frac{M(HL^{-1})}{h} + o(\eta)^{-\delta} \right) \right\} d\eta + o(\xi^{-1}) .$$

Berücksichtigt man noch

$$\sum_L \frac{M(L)}{h} \frac{M(HL^{-1})}{h} = \frac{M(H)}{h} ,$$

so folgt (82) für $n+1$, da die auftretenden Integrale wegen $0 < \delta < 1$ entsprechend abgeschätzt werden können.

Wenden wir nun auf (81) die SCHWARZsche Ungleichung an, so können wir wegen (82) die Glieder mit $M(L) = 0$ in der Summe weglassen, da sie zum Restglied (in der Form $o(1)$) geschlagen werden können :

Dies ergibt :

$$(83) \quad \sigma_{n+1}^2(\xi, H) \leq \sum_{\substack{L \\ M(L) \neq 0}} 1 \sum_{\substack{L \\ M(L) \neq 0}} \left(\frac{1}{\xi} \int_0^\xi \sigma_n'(\eta, L) \sigma_n'(\xi - \eta, HL^{-1}) d\eta \right)^2 + o(1).$$

Wie groß ist nun

$$\sum_{\substack{L \\ M(L) \neq 0}} 1 \quad ?$$

Zunächst zeigen wir :

Es gilt entweder $M(L) = 0$ oder $M(L) = \text{ord } K'$,
denn :

Gilt $\overline{X}(L) = 1$ für alle $\overline{X} \in K'$, so ist offensichtlich $M(L) = \text{ord } K'$;

Gibt es andererseits ein $\overline{X} \in K'$ mit $\overline{X}(L) \neq 1$,
so ist

$$\overline{X}(L) M(L) = \sum_{\overline{X} \in K'} \overline{X} \cdot \overline{X}(L) = M(L) ,$$

also gilt $M(L) = 0$

Da weiter

$$\begin{aligned}\sum_L M(L) &= \sum_L \sum_{\chi \in K'} \overline{\chi}(L) \\ &= \sum_{\chi \in K'} \sum_L \overline{\chi}(L) \\ &= h\end{aligned}$$

gilt, ist

$$(84) \quad \sum_{\substack{L \\ M(L) \neq 0}} 1 = \frac{h}{\text{ord } K'} \quad (\epsilon \mathbb{N}, \text{ natürlich}).$$

Mit (84) erhält man aus (83) weiter, wenn

$$h_L^H(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \sigma_n'(\xi - \eta, L) \sigma_n'(\eta, HL^{-1}) d\eta$$

gesetzt wird,

$$\sigma_{n+1}'^2(\xi, H) \leq \frac{h}{\text{ord } K'} \sum_{\substack{L \\ M(L) \neq 0}} (h_L^H(\xi))^2 + o(1).$$

Wegen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi} \int_0^\xi h_L^H(\eta) d\eta &= \frac{1}{\xi^2} \int_0^\xi \sigma_n(\xi - \eta, L) \sigma_n'(\eta, HL^{-1}) d\eta + o(1) \\ &= o(1)\end{aligned}$$

ist Hilfssatz 9 anwendbar und liefert mit

$$F_n = \max_L \overline{\lim_{\xi \rightarrow \infty}} \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \sigma_n'^2(\eta, L) d\eta$$

unmittelbar

$$F_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\text{ord } K'} \right)^2 F_n^2$$

oder

$$(85) \quad S_{n+1} \leq \frac{1}{2} S_n^2 \quad \text{mit} \quad S_n = \left(\frac{h}{\text{ord } K'} \right)^2 F_n.$$

Da noch

$$\begin{aligned} S_0 &= \left(\frac{h}{\text{ord } K'} \right)^2 \max_L \overline{\lim_{\xi \rightarrow \infty}} \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \sigma_0'^2(\eta, L) d\eta \\ &\leq \left(\frac{h}{\text{ord } K'} \right)^2 \max_L \frac{M^2(L)}{h^2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

gilt, wird offensichtlich S_N beliebig klein, wenn nur N genügend groß genommen wird.

Wie bei WIRSING läßt sich weiter für ein festes, genügend großes N

$$\sigma_N(\xi, H) = o(\xi^{-b_{N+1}})$$

ganz analog beweisen. (Vgl. (28) bei WIRSING)

Zusammen mit (80) erhält man hieraus

$$\rho(\xi, H) = O(\xi^{-b_{N+1}}) .$$

Läßt man nun a gegen a_1 streben, so strebt b_{N+1} gegen

$$a_2 = a_1 + \frac{b - a_1}{(b+1)^{N+1}} > a_1 .$$

Damit ist auf elementarem Wege bewiesen :

Für jedes $H \in G/U$ und jedes $a \geq 0$ gilt :

$$r(x, H) = O(\log^{-a} x) .$$

Mit (72) folgt hieraus :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_G(g) Ng^{-1} &= \frac{1}{h} \sum_{\chi \in K'} \frac{\bar{\chi}(H)}{A(\chi)} \sum_{Ng \leq x} \chi(g) Ng^{-1} + c + O(\log^{-a} x) \\ &= \frac{M(H)}{h} \log x + c' + O(\log^{-a} x) \text{ nach (2).} \end{aligned}$$

Ist p_1 ein Primelement mit kleinster Norm (> 1), so erhält man weiter für

$$\psi(x, H) = \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} \Lambda_G(g)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{Np_1^-}^x y d\left(\frac{M(H)}{h} \log y + c' + O(\log^{-a} y)\right) \\
 &= \frac{M(H)}{h} x + O(1) + O\left(y \log^{-a} y \Big|_{Np_1^-}^x\right) + \int_{Np_1^-}^x \log^{-a} y dy \\
 &= \frac{M(H)}{h} x + O(x \log^{-a} x) .
 \end{aligned}$$

Da wegen $K''' = \emptyset$ ja $D(H) = \frac{M(H)}{h}$ für alle $H \in G/U$ gilt, ist damit, wie in 4.2 angekündigt, auf elementarem Wege bewiesen :

Satz 3 :

Für jedes $H \in G/U$ und jedes $a \geq 0$ gilt :

$$\psi(x, H) = D(H) x + O(x \log^{-a} x) .$$

5. Übergang von $\Psi(x, H)$
auf $\pi(x, H)$

Wir werden nun neben den bisher für $\Psi(x, H)$ erzielten Ergebnisse die entsprechenden für $\pi(x, H)$ herleiten, wobei natürlich für alle $H \in G/U$ definiert ist :

$$\pi(x, H) = \sum_{\substack{Np \leq x \\ p \in H}} 1 \quad .$$

Zunächst wollen wir zeigen, daß bei der ψ -Funktion die Primelemente in der ersten Potenz den wesentlichen Anteil ausmachen, während die Quadrate, Kuben, usw. von Primelementen nur geringere Bedeutung haben : Betrachten wir für genügend großes x

$$\sum_{\substack{Np^2 \leq x \\ p \in H}} \log Np + \sum_{\substack{Np^3 \leq x \\ p \in H}} \log Np \quad \dots + \sum_{\substack{Np^n \leq x \\ p \in H}} \log Np \quad ,$$

mit maximalem n , ohne daß die letzte Summe leer ist, so ist

$$n \leq \left[\frac{\log x}{\log Np_1} \right] \quad ,$$

wobei p_1 wiederum ein Primelement mit minimaler Norm ist.

Also gilt

$$n = O(\log x) \quad .$$

Jede der n Summen läßt sich nun durch

$$O(\log x \sum_{Np \leq x} 1) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

abschätzen, so daß wir damit erhalten :

$$(86) \quad \Psi(x, H) = \sum_{\substack{Np \leq x \\ p \in H}} \log Np + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x) .$$

Mit dieser Abschätzung kann man ganz analog zum klassischen Fall von $\Psi(x, H)$ auf $\pi(x, H)$ schließen. Wir wollen dies hier ausführlich nur für Satz 1 durchführen, und erhalten

Satz 4 :

Es gibt ein $c_3 > 0$, so daß für jedes $H \in G/U$ gilt :

$$\pi(x, H) = D(H) \operatorname{lix} + O(x \exp(-c_3 \sqrt{\log x})) .$$

Dabei ist mit lix , wie üblich, der Integrallogarithmus bezeichnet.

Beweis :

Es ist mit Satz 1 und (86)

$$\sum_{\substack{Np \leq x \\ p \in H}} \log Np = D(H) x + O(x \exp(-c_2 \sqrt{\log x})), \quad c_2 > 0$$

und weiter

$$\begin{aligned}
 \pi(x, H) &= \int_{Np_1^-}^x \frac{1}{\log y} d(D(H)y) + O(y \exp(-c_2 \sqrt{\log y})) \\
 &= D(H) \int_{Np_1^-}^x \frac{dy}{\log y} + O\left(\frac{y}{\log y} \exp(-c_2 \sqrt{\log y}) \Big|_{Np_1^-}^x\right) \\
 &\quad + O\left(\int_{Np_1^-}^x \frac{\exp(-c_2 \sqrt{\log y})}{\log^2 y} dy\right) \\
 &= D(H) \operatorname{li} x + O(x \exp(-c_3 \sqrt{\log x})) \quad .-
 \end{aligned}$$

Aus Satz 2 erhält man nun

Satz 5 : $(K''' \neq \emptyset)$

Für jedes ε mit $0 < \varepsilon < \gamma$ und jedes $H \in G/U$ gilt

$$\begin{aligned}
 \pi(x, H) &= D(H) \operatorname{li} x + O(x^{1-\gamma+\varepsilon} \log x), \\
 &\text{wobei } \gamma \text{ aus (26) zu nehmen ist.}
 \end{aligned}$$

Beweis :

Hierbei ist mit (26) $0 < \gamma \leq 1-\alpha$ und wegen $K''' \neq \emptyset$ auch mit (7) $\alpha \geq \frac{1}{2}$ zu beachten, woraus

$$0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$$

folgt und deshalb mit (86) weiter

$$\sum_{\substack{Np < x \\ p \in H}} \log Np = D(H) x + O(x^{1-\gamma+\varepsilon} \log^2 x) .$$

Dies liefert schließlich

$$\begin{aligned} \pi(x, H) &= \int_{Np_1^-}^x \frac{1}{\log y} d(D(H) y + O(y^{1-\gamma+\varepsilon} \log^2 y)) \\ &= D(H) \operatorname{li} x + O(x^{1-\gamma+\varepsilon} \log x) \\ &\quad + O\left(\int_{Np_1^-}^x y^{-\gamma+\varepsilon} dy\right) \\ &= D(H) \operatorname{li} x + O(x^{1-\gamma+\varepsilon} \log x) .- \end{aligned}$$

Schließlich liefert Satz 3

Satz 6 : $(K^u = \emptyset)$

Für jedes $H \in G/U$ und jedes $a \geq 0$ gilt :

$$\pi(x, H) = D(H) \operatorname{li} x + O(x \log^{-a} x) ,$$

wobei beim Beweis elementar vorgegangen werden kann.

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir kurz auf das Problem der Abhängigkeit der Restglieder in den Primzahlsätzen von der gerade betrachteten Untergruppe eingehen und dabei untersuchen, wie sich die im klassischen Fall erzielten Ergebnisse bezüglich der Abhängigkeit vom Modul hier eventuell einordnen lassen.

Die Fragestellung müssen wir zunächst etwas präzisieren :

Wenn man 3 Gruppen G, U, U' betrachtet mit $U'CU'CG$ und dabei Folgendes voraussetzt, wie wir es in (1) getan haben :

1) G/U endlich ,

$$2) \sum_{\substack{Ng \leq x \\ g \in H}} 1 = c_H x + O(x^\alpha) \text{ mit } 0 \leq \alpha < 1, \\ c_H \geq 0, \quad \sum_H c_H > 0, \quad N \text{ wie in (1)},$$

$H \in G/U$,

und

3) G/U' endlich, (woraus U/U' endlich folgt),

so muß 2) keineswegs für $H \in G/U'$ gelten. Auch für $U \in U/U'$ braucht 2) nicht stets zu gelten, z.B. wenn $c_U = 0$ ist.

Weiter ist zu bedenken, daß die andere wesentliche Eigenschaften der in dieser Arbeit betrachteten Gruppen, nämlich die Existenz eines abzählbaren Basissystems, nicht in G und in Untergruppen von G von endlichem Index anzutreffen ist.

Anders liegt die Situation, wenn man 2) für jede Untergruppe U mit endlichem Index in einer freien, abelschen Gruppe G , die ein abzählbares Basissystem besitzt, fordert. Für jedes UCG erhält man dann Primzahlsätze mit Restglied (z.B. Satz 4) und man kann dann die Frage stellen, wie sich die Restglieder in Abhängigkeit von den Untergruppen U verhalten. Dies ist aber etwas anderes als die Modulabhängigkeit im klassischen Falle :

Ist $D > 1$ Modul, so erhält man die primen Restklassen mod D nach FORMAN and SHAPIRO [16] als Nebenklassen einer Gruppe G nach einer Untergruppe U , wenn man setzt :

$$G = [p_1, p_2, \dots] \quad \text{mit } p_i \in \mathbb{N}, p_i \text{ Primzahl,} \\ p_i \nmid D$$

und

$$U = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in G, (a, b) = 1, a \equiv b \pmod{D} \right\}.$$

Betrachtet man hierzu einen weiteren Modul $D' > 1$ und bildet dazu analog G' und U' , so gibt es folgende 3 Möglichkeiten:

1) Es gibt ein $p \in \{p_1, p_2, \dots\}$ mit

$$p \notin \{p'_1, p'_2, \dots\},$$

dann gilt $p \notin G'$ und wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Q}$ auch $p^n \notin G'$ für jedes $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, d.h. G' kann nicht Untergruppe von G mit endlichem Index sein;

2) Es gibt ein $p' \in \{p'_1, p'_2, \dots\}$ mit

$$p' \notin \{p_1, p_2, \dots\},$$

so ergibt sich analog zu 1), daß G nicht Untergruppe von G' mit endlichem Index sein kann.

In diesen beiden Fällen ist also eine Einordnung in die oben betrachtete Situation (Abschnitt 1.) nicht möglich.

Es bleibt:

3) Es ist $G = G'$, d.h. D und D' besitzen die gleichen Primteiler.

Es lassen sich hier also unendlich viele Untergruppen $U, U', \dots$ angeben, für die jedenfalls 2) von der vorigen Seite gilt.

Die Frage nach dem Verhalten der Restglieder in den Primzahlsätzen bezüglich der Gleichmäßigkeit in diesen Moduln $D, D', \dots$ dürfte insoweit zu lösen sein, als die Hauptschwierigkeit hierbei bekanntlich die Verteilung der reellen Nullstellen in der Nähe von $s = 1$ von $L(s, \chi_D)$ mit reellem, primitivem χ_D sind. Nun gibt es unter den betrachteten Moduln nur genau einen reellen, primitiven Charakter χ_D , so daß das Verhalten der Restglieder in den Primzahlsätzen für diese speziellen Moduln leicht zu überblicken sein dürfte.

6. Beispiele

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie sich die bekannten Primzahlsätze für Nebenklassen hier einordnen lassen.

Wie man bei dem gewöhnlichen Primzahlsatz für die arithmetische Progression

$$\pi(x, D, 1) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1(D)}} 1 = \frac{1}{\varphi(D)} \operatorname{li} x + O(x \exp(-c\sqrt{\log x}))$$

mit $(D, 1) = 1$

(Beweis : siehe etwa ESTERMANN [13])

die Gruppen G und U geeignet wählen kann, ist im vorigen Abschnitt beschrieben worden. Als Norm N muß man den absoluten Betrag $||$ und für α kann man natürlich 0 nehmen.

Offensichtlich stimmen hier die DIRICHLET-Funktionen $L(s, \chi)$ mit den bekannten $L(s, \chi_D)$ überein, wobei χ_D ein Charakter der primen Restklassengruppe mod D ist.

Wie schon früher bemerkt wurde, ist hier $K''' = \emptyset$, da ja bekanntlich $L(1, \chi_D) \neq 0$ gilt für jeden Nicht-hauptcharakter χ_D . (Ein Resultat, was wegen $\alpha = 0$ auch aus (7) folgt.)

Da in (1) nun alle c_H gleich sind, nämlich $= \frac{1}{D}$, besteht die Gruppe K' nur aus χ_D^0 , dem Hauptcharakter mod D .

Für $D(H)$ erhalten wir nach (34) :

$$\begin{aligned} D(H) &= \frac{1}{h} \sum_{\chi} \overline{\chi}(H) B(\chi) \\ &= \frac{1}{h} \overline{\chi_D^0}(H) \\ &= \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Damit ist in diesem Falle mit Satz 4 der Primzahl-
satz für die arithmetische Progression auf analy-
tischem Wege bewiesen.

Wegen $K''' = 0$ ist Satz 5 nicht anwendbar, aber
der Beweis von Satz 6 beinhaltet einen elementaren
Beweis von

$$\pi(x, D, 1) = \frac{1}{\varphi(D)} \operatorname{li} x + O(x \log^{-a} x)$$

für jedes $a \geq 0$; (WIRSING [36],
BOMBIERI [6]).

Ganz Ähnliches läßt sich auch für den Primidealsatz
für Idealklassen beweisen :

Es sei F ein algebraischer Zahlkörper n -ten
Grades fest vorgegeben, $\mathfrak{P}$ ein festes ganzes Ideal
in F .

Als G wähle man

$$G = [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots] \quad \text{mit } \mathfrak{P}_1 \text{ Primideal} \\ \text{in } F, \mathfrak{P}_1 \nmid \mathfrak{P}.$$

Als Norm N kann man die übliche Idealnorm nehmen.
Die im folgenden zitierten Sätze beziehen sich auf
eine Arbeit von LANDAU [30].

Als Untergruppe U nehme man

$$U = \{ \alpha \mid \alpha \in G, \alpha = [\gamma], \gamma \in F, \gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}}, \gamma \neq 0 \},$$

d.h. U bestehe aus allen Hauptidealen $[\gamma]$, wobei
 γ total positiv ist und $\gamma - 1 \in \mathfrak{P}$ gilt.

Dann ist nach Satz XXVI G/U endlich und es gilt
weiter nach Satz XCVI :

$$\sum_{\substack{N\alpha \leq x \\ \alpha \in H}} 1 = Cx + O(x^{1-\frac{2}{n+1}}),$$

mit $H \in G/U$, $C > 0$ unabhängig von H .

$$(C = \frac{h}{h(\mathbb{F})} \lambda \prod_{\mathfrak{p}|\mathbb{F}} (1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}});$$

Dabei ist h die Klassenzahl von F , nicht zu verwechseln mit $h(\mathbb{F})$, der Anzahl der Nebenklassen mod $\mathbb{F}$ (wird hier als h bezeichnet) und λ ist eine angebbare Körperkonstante).

Da auch hier $K''' = \emptyset$ gilt, vgl. Satz LXIV, ist

$$D(H) = \frac{1}{h} \quad \text{für alle } H \in G/U.$$

Damit stimmt in diesem Falle Satz 4 mit dem Primidealsatz für Idealklassen (Satz XCVIII) überein. Auch hier ist wegen $K''' = \emptyset$ Satz 5 nicht anwendbar, und der Beweis von Satz 6 liefert einen elementaren Beweis von

$$\pi(x, H) = \frac{1}{h(\mathbb{F})} \operatorname{li} x + O(x \log^{-a} x)$$

für jedes $H \in G/U$.

Damit ist das Ergebnis von EDA und NAKAGOSHI [12] aus dem Jahre 1967 verbessert, wie es der Referent in den Mathematical Reviews 38 vermutet hatte.

Bei den oben angeführten Beispielen war es stets so, daß die c_H und $D(H)$ alle gleich waren. In zwei abschließenden Korollaren soll dieser Zusammenhang etwas genauer untersucht werden.

Korollar 1 :

Die $D(H)$ sind genau dann alle gleich, wenn alle c_H gleich sind und K''' leer ist.

Beweis :

Nehmen wir zuerst an, daß alle c_H gleich sind und daß K''' leer ist, dann gilt

$$c_H = \frac{c}{h} > 0$$

und weiter nach den Charakterrelationen

$$K' = \{ \chi_1 \} .$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} D(H) &= \frac{1}{h} \sum_{\chi} \bar{\chi}(H) B(\chi) \\ &= \frac{1}{h} \bar{\chi}_1(H) \\ &= \frac{1}{h} \end{aligned}$$

für alle $H \in G/U$. (Diese Situation lag bei den oben angegebenen Beispielen vor.)

Sind nun umgekehrt alle $D(H)$ gleich, so gilt wegen (35)

$$D(H) = \frac{1}{h}$$

für jedes $H \in G/U$, insbesondere auch für $H = U$.
Dann muß aber $K''' = \emptyset$ gelten, da sonst

$$\frac{1}{h} = D(U) = \frac{1}{h} \sum_X \bar{X}(U) B(X) = \frac{1}{h} \sum_X B(X) = 0$$

wäre.

Damit haben wir

$$\sum_{X \in K'} \bar{X}(H) = 1 \quad \text{für jedes } H \in G/U,$$

insbesondere für $H = U$ folgt dann weiter

$$1 = \sum_{X \in K'} \bar{X}(U) = \sum_{X \in K'} 1, \quad \text{also } K' = \{X_1\}.$$

Nun betrachte man folgendes lineare Gleichungssystem, indem man sich die H bzw. die X in irgendeiner Weise durchnummeriert denkt :

$$\begin{array}{rcll} c_1 X_1(H_1) + \dots + c_h X_1(H_h) & = & A(X_1) & = c > 0 \\ c_1 X_2(H_1) + \dots + c_h X_2(H_h) & = & A(X_2) & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ c_1 X_h(H_1) + \dots + c_h X_h(H_h) & = & A(X_h) & = 0. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem für die c_i ist eindeutig auflösbar, da

$$\begin{vmatrix} X_1(H_1) & \dots & X_1(H_h) \\ \vdots & & \vdots \\ X_h(H_1) & \dots & X_h(H_h) \end{vmatrix}^2 = h^h \neq 0.$$

Nun ist $c_1 = c_2 = \dots = c_h = \frac{c}{h}$ eine Lösung des Systems und folglich die einzige.

Also sind alle c_H gleich .-

Bemerkung :

Man vergleiche zu diesem Korollar ein Ergebnis von FOGELS [15], aus dem Anhang dieser Arbeit. FOGELS berücksichtigt allerdings nicht den Fall $K''' \neq \emptyset$.

Umgekehrt läßt sich nun leicht ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür angeben, wann die $D(H)$ alle bis auf eine Nebenklasse verschwinden.

Es gilt diesbezüglich :

Korollar 2 :

Die $D(H)$ verschwinden alle bis auf eine Nebenklasse H' genau dann, wenn K'' leer ist.

Beweis :

1) Es gilt $K''' = \emptyset$.

Da $D(U) = \frac{1}{h} \sum_{\chi \in K'} 1 \neq 0$, also $= 1$ ist,

ist $H' = U$ und $K' = K$, also $K'' = \emptyset$.

Ist andererseits $K'' = \emptyset$, so ist $K = K'$ und

$$D(H) = \frac{1}{h} \sum_X \bar{\chi}(H) = \begin{cases} 0 & \text{für } H \neq U \\ 1 & \text{für } H = U \end{cases},$$

also sind alle $D(H) = 0$, bis auf $H' = U$.

2) Es gilt $K''' \neq \emptyset$.

Dann ist

$$1 = D(H') = \frac{1}{h} \left\{ \sum_{\chi \in K'} \bar{\chi}(H') - \sum_{\chi \in K'''} \bar{\chi}(H') \right\}.$$

Hieraus ergibt sich die Ungleichung

$$1 \leq \frac{1}{h} 2 \operatorname{ord} K' \quad \text{oder}$$

$$h \leq 2 \operatorname{ord} K' \quad \text{und weiter}$$

$$h = 2 \operatorname{ord} K'.$$

Also ist $K = K' \cup K'''$ und K'' ist leer.

Nehmen wir umgekehrt $K'' = \emptyset$ an und bilden dann folgende Menge:

$$L = \{g \mid g \in G, \chi(g) = 1 \text{ für alle } \chi \in K'\}.$$

Wie man leicht verifizieren kann, ist L eine Untergruppe von G und es gilt

$$U \subset L \subset G \quad \text{und} \quad L/U \subset G/U .$$

Nach der Theorie der Charaktere ist weiter

$$[L/U] = \frac{h}{\text{ord } K^1} .$$

Da $K'' = \emptyset$ gilt, haben wir

$$\frac{h}{\text{ord } K^1} = 2 .$$

Es gibt also neben U genau eine weitere Nebenklasse H' mit $H' \in L/U$.

Man kann nun leicht zeigen, daß $D(H) = 0$ gilt für alle $H \in G/U$ mit $H \neq H'$.

Weiter ist dann $D(H') = 1$.-

Bemerkung :

Aus (1) und Satz 4 erhält man leicht folgende Ungleichung :

$$D(H) + o(1) \leq c_H \log x + O(x^{\alpha-1} \log x) .$$

Hier kann man sofort ablesen : Ist $c_H = 0$, so auch $D(H)$.

$D(H) = 0$ für alle $H \in G/U$ bis auf ein H' ist demnach sicher dann der Fall, wenn alle $c_H = 0$ sind bis auf ein $c_{H'}$. Die umgekehrte Richtung ist aber nicht richtig, siehe Beispiel VI in [16] .

Literaturverzeichnis

- [1] AMITSUR, A.S. Arithmetic linear transformations and abstract prime number theorems. Canad.J.Math.13,83-109,1961.
- [2] - Correction to 'Arithmetic linear transformations'. Canad.J.Math.21, 1-5, 1969.
- [3] AHERN, P.R. Elementary methods in the theory of primes. Trans.Amer.Math.Soc.118 (1965), 221-242.
- [4] AYOUB, R. An Introduction to the analytic Theory of Numbers. Mathematical Surveys, No.10. Amer.Math.Soc.1963
- [5] BEURLING, A. Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers generalises. Acta Math.Vol.68, 1937, pp.255-291.
- [6] BOMBIERI, E. Sulle formule die A.Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel 'Primzahl-satz'. Riv.Mat.Univ.Parma (2),3 (1962), 393-440.
- [7] BREDIHIN, B.M. Free numerical semigroups with power densities (R). Mat.Sb.(N.S.), 46 (88)(1958), 143-158.
- [8] - The remainder term in the asymptotic formula for $V_G(x)$ (R). Izv.Vyss. Ucebn.Zaved.Matematika, 1960, no.6 (19), 40-49.
- [9] - Distribution of generating elements in ordered semi-groups with a regular normalization (R). Proc.First Sci.Conf.Math.Dept.Inst.Volga Region (May, 1960)(R), pp.4-8.
- [10] DIAMOND, H.G. The prime number theorem for Beurlings generalized numbers. J.number Theory 1, 200-207, (1969).

- [11] BATEMAN, P.T. and DIAMOND, H.G. Asymptotic Distribution of Beurling's generalized Prime Numbers. Studies in Mathematics, Vol. 6, Studies in Number Theory, W.J. LeVeque, editor, 152-210, The Math. Association of America, 1969.
- [12] EDA, Y. and NAKAGOSHI, N. An elementary proof of the prime ideal theorem with remainder term. Sci. Rep. Kanazawa Univ. 12, 1-12, (1967).
- [13] ESTERMANN, T. Introduction to modern Prime Number Theory. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 41, 1952.
- [14] FAJNLEJEB, A.S. Summierung der Werte multiplikativer Funktionen, die auf einer normierten Halbgruppe definiert sind (R). Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. fiz.-mat. Nauk 9, Nr. 6, 49-55, (1965) (R).
- [15] FOGELS, E. On the abstract theory of primes I. Acta Arith. 10 (1964/65), 137-182.
- [16] FORMAN, W. and SHAPIRO, H.N. Abstract prime number theorems. Comm. Pure Appl. Math. (1954), 587-619.
- [17] HORADAM, E.M. Arithmetical functions of generalized primes. Amer. Math. Monthly 68 (1961), 626-629.
- [18] - The order of arithmetical functions of generalized integers. Amer. Math. Monthly 70 (1963), 506-512.
- [19] - The Euler φ -function for generalized integers. Proc. Amer. Math. Soc. 14, (1963), 754-762.
- [20] - A calculus of convolutions for generalized integers. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A66 = Indag. Math. 25 (1963), 695-698.
- [21] - Selberg's inequality for generalized integers using the calculus of convolutions. Nederl. Akad. Wetensch.

Proc.Ser.A66 = Indag.Math.25 (1963),
699-704.

- [22] - The number of unitary divisors of a generalized integer.Amer.Math. Monthly 71,(1964),893.895.
- [23] - The average order of the number of generalized integers representable as a product of a prime and a square.J.Reine Angew.Math.217, (1965),64-68.
- [24] - Exponential functions for arithmetical semi-groups.J.Reine Angew. Math.222,(1966),14-19.
- [25] - A sum of a certain divisor function for arithmetical semi-groups. Pacific J.Math.22,(1967),407-412.
- [26] - On the number of pairs of generalized integers with least common multiple not exceeding x .Amer. Math.Monthly 74,(1967),811-812.
- [27] JUŠKIS,Z. Asymptotische Entwicklung der Verteilungsgesetze gewisser Funktionen, die auf geordneten Halbgruppen mit regulärer Normierung definiert sind (R).Litov.mat.Sbornik 5,167-182,(1965).
- [28] KALNIN,I.M. Analogues of elementary theorems on primes in the semigroup of real numbers (R).Rigas Politehn. Inst.Zinatn.Raksti 10,(1963),vyp. 1,151-165.
- [29] LANDAU,E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.Bd.I,Teubner Verlag,Leipzig-Berlin,1909.
- [30] - Über Ideale und Primideale in Idealklassen.Math.Z.2,(1918),52-159.
- [31] MALLIAVIN,P. Sur le reste de la loi asymptotique de repartition des nombres premiers generalises de Beurling.

- [32] NATANSON, I. P. Acta Math. 106, (1961), 281-298.
Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie Verlag, Berlin, 1954.
- [33] NYMAN, B. A general prime number theorem.
Acta Math. 81, 1949, 299-307.
- [34] PRACHAR, K. Primzahlverteilung. Springer-Verlag, 1957.
- [35] WEGMANN, H. Beiträge zur Zahlentheorie auf freien Halbgruppen II. J. Reine Angew. Math. 221, (1966), 150-159.
- [36] WIRSING, E. Elementare Beweise des Primzahlsatzes mit Restglied I/II. J. Reine Angew. Math. 211/214/15, 205-214/1-18, (1962).

Lebenslauf

Ich, Helmut Müller, wurde als Sohn des Studienrates Heinrich Müller und seiner Ehefrau Hilde Müller, geb. Adrian, am 12. Februar 1943 in Berlin-Spandau geboren. Von September 1949 bis März 1953 ging ich auf die 7. Grundschule, anschließend zwei Jahre auf die 1. Grundschule in Berlin-Spandau. Ab April 1955 besuchte ich das humanistische Kant-Gymnasium in Berlin-Spandau im neusprachlichen Zug, das ich im März 1962 mit dem Abitur und dem Erwerb des Großen Latinum verließ. Im Sommersemester 1962 begann ich an der Freien Universität Berlin mit dem Studium der Mathematik und Physik. Zu Beginn des Wintersemesters 1964/65 bestand ich die Diplomvorprüfung in Mathematik mit 'sehr gut'. Während des Wintersemesters 1965/66 und des Sommersemesters 1966 setzte ich mein Studium in Göttingen an der Georg-August-Universität fort.

Seit dem Wintersemester 1966/67 war ich wieder an der Freien Universität Berlin immatrikuliert, bis ich im Februar 1968 dort die Diplomhauptprüfung in Mathematik mit der Gesamtnote 'gut' bestand. Die Diplomarbeit 'Über den Satz von Siegel für die L-Funktionen' fertigte ich unter Anleitung von Herrn Professor Dr. Orsinger an.

Meine akademischen Lehrer in Mathematik waren in Berlin die Professoren Dinghas, Gottschling, Grotemeyer, Orsinger, Pachale, Ringel und Stöhr, in Göttingen die Professoren Danzer, Davenport, Deuring, Kneser und Lyra. Vorlesungen über Physik hörte ich in Berlin bei den Professoren Grawert, Honerjäger, Lassen und Päsler, in Göttingen bei Lüders und Hajdu. Meine Ausbildung in Astronomie erhielt ich in Berlin bei Professor Hinderer. Seit Dezember 1968 bin ich am I. Mathematischen Institut der Freien Universität Berlin als Wissenschaftlicher Assistent angestellt, nachdem ich dort zuvor seit etwa einem Jahr als Studentische Hilfskraft und später als Wissenschaftlicher Hilfsassistent beschäftigt war. Im August 1968 heiratete ich Ulrike Budzus. Wir haben ein Kind.

